グロタンディーク

グロタンディークほど、多くの伝説が語られた20世紀の数学者はいないだろう。しかしここで書きたいのは、私にとってのグロタンディークである。それは、今では遠い学生のころ、来る日も来る日も読みふけった、Tohoku、EGA、SGAの著者である。

グロタンディークがこれらを書いたのは、1950年代末から60年代末にかけての10数年という、仕事の膨大さに比べれば、かなり短い時間である。グロタンディークは、1928年3月28日生まれなので、20代後半から30代にかけての業績である。

数学的な内容を項目としてあげれば、

1．層とコホモロジー（Tohoku）
2．スキーム（EGA）
3．基本群（SGA1）
4．エタール・コホモロジー（SGA4，5）
5．リーマン・ロッホ（SGA6）
6．モノドロミー（SGA7）

である。これらはいずれも、現在の代数幾何、あるいは数論幾何の基礎と位置づけられている。それにとどまらず、数学全般にわたる影響を与えたものも多い。どれをとっても、グロタンディークならではの、独創的な業績である。これが10年あまりという時間に、次々と生み出されていったということは、事実ではあるが、信じがたいことでもある。

この時期のグロタンディークについては、以前本誌の記事「現代代数学の歩み・セール」(2005年3月号)で紹介した、「グロタンディーク・セール交信録」に収録されている2人の手紙のやりとりからも、大変興味深い内容をうかがい知ることができる。

モチーフや遠アーベル幾何、p進コホモロジーといった有名な業績が、リストからもれていることに気づかれた読者もいるだろう。これらについては、ほかの方が別の機会に書かれることを期待する。

時代背景

グロタンディークの話にはいる前に、彼が登場したころの代数幾何の重要な問題から、ヴェイユ予想、リーマン・ロッホの公式、整数環上の代数幾何を、簡単にみておこう。これらはそれぞれ、SGA4,5、SGA6とEGAで徹底的に扱われることになる。

ヴェイユは、代数幾何的方法の数論への導入を重視し、有限体上の代数曲線の合同ゼータ関数に関するリーマン予想の類似を証明した。さらに、高次元の多様体への一般化を予想し、コホモロジーによる解決を示唆した。セールはこれをうけて、問題のコホモロジー理論の構成を模索していた。

代数曲線の因子に対するリーマン・ロッホの公式は、代数曲線論の基本的な道具である。高次元の代数多様体に対し、ヴェイユ予想では定数係数のコホモロジーが問題となるが、リーマン・ロッホの公式は、カルタンとセールによって導入されていた連接層のコホモロジーの次元の問題として定式化される。複素数体上の多様体については、ヒルツェブルフが証明し、正標数の場合が問題となっていた。

整数係数の方程式で定義される多様体を調べるとき、素数pを法とする還元が重要である。しかし、当時の代数幾何は、体上で定式化されていたため、このような数論的な問題を扱うには不便であり、整数環上の代数幾何の基礎づけが試みられていた。

Tohoku

これは、東北大学の「東北数学雑誌」で1957年に出版された “Sur quelques points d'algèbre homologique（ホモロジー代数のいくつかの点について）” の通称である。専門家なら、Tohoku大学がSendaiにあることなど知らなくても、グロタンディークのTohokuで通じてしまう。

この論文では、層、圏、コホモロジーという、20世紀の抽象数学の特徴的な問題が扱われている。これらは、グロタンディーク以前に、ルレー、カルタン、アイレンバーグ、マックレインといった人たちによって、導入され研究されていた。しかし、この論文によって、これらの理論が一新されたといってよいだろう。

19世紀のリーマンに由来する、空間とは何かという問いには、このときまでに、局所環つき空間とよばれる、環の層のついた位相空間である、という答えが、カルタンにより与えられていた。しかし、そのような空間を調べるための基本的な道具である層係数コホモロジーについては、実多様体のような

局所コンパクト空間についてはともかく、一般の位相空間でどう扱えばよいのか、わかっていなかった。

これを、アーベル圏の理論を構築することで鮮やかに解決したのが、Tohoku である。これは、スキームの理論の基礎を与えるとともに、のちのエタール・コホモロジーへの道を開くものでもあった。これものちの話になるが、コホモロジー群よりも、そのもとになる複体を重視する導来圏のアイデアも、グロタンディークによるものである。導来圏は、最近はミラー対称性の研究でもでてくるそうである。

EGA

名高い「代数幾何原論」である。セールが、論文「代数的連接層」で局所環つき空間として展開した、任意標数の代数閉体上の代数多様体の理論の、巨大な一般化である。

代数幾何であれば、体上有限生成な環を扱えばよいが、数論幾何では、もっと一般の環を扱うことが必要になる。そこで、どのような環を扱えばよいのか、試行錯誤があったらしい。これについてセールは、「交信録」につけた注で、いちばんよい環の圏はすべての環の圏だった、と書いている。いちばん自然な定義を求めていくことで、もっとも一般的な枠組みを作っていく、グロタンディークらしさが現れている。代数幾何の基礎づけは、EGA 以前にも、上記のセールのものや、ヴェイユのものなどがあったが、これらは EGA に完全に淘汰されてしまっている。

全 13 章の計画が、第 4 章までで中断されたままである、というのも有名な話だが、そこまででも計 1,800 ページという膨大なものである。IHES（パリ郊外の高等科学研究所）の青表紙の雑誌で 1960 年から 1967 年まで毎年 1 冊ずつ出版されたものだが、第 1 章だけは、大幅に改訂されたものがシュプリンガーから本となってでている。

そのはじめのところをみると、数学の対象とは構造のついた集合であるという、ブルバキの数学観が、時代遅れになっていることがわかる。グロタンディークにとっては、数学の対象とは、表現可能な関手を表現する圏の対象である。

たとえば、ブルバキ流にいえば、実数体とは、実数全体の集合に、加法と乗法という代数的な演算を与え、さらに位相をいれたものである。EGA では、スキーム X と Y の S 上のファイバー積とは、S 上のスキームの圏の対象で、X が表現する関手と Y が表現する関手の積関手を表現するもの、というのが定義である。

数学の対象は、それが何からなりたっているかではなく、どういう役割を果たしているかが重要だ、という視点の転換がそこにある。アファイン・スキームも、局所環つき空間として構成されるのだが、その存在理由は、大域切断という関手の随伴関手であるところにある。対象それ自体よりも、対象から対象への射のほうが重要だ、といいかえてもよい。

この視点にたつグロタンディークにとって、スキームの点とは、位相空間としての点ではない。それは、ほかのスキームからの射である。これは、シュヴァルツの超関数が、試験関数の空間の双対として定義されることを思い起こさせる。

一方、環つき空間としてのアファイン・スキームの定義では、にわとりとたまごのように、関数と点のどちらが先かをみるのも面白い。ここでは、関数の方が先にある。点とは関数の値が定まる場所、関数の点での値は体の元と考えることで、関数の定義域としてのアファイン・スキームは素イデアルの集合である、という定義に導かれる。

余談だが、homomorphism の訳語として、準同形ということばが定着している。これは、同形もどきという意味だから、同形がだいじというブルバキの思想を反映したものといえよう。射のほうが基本的という、より現代的な視点にはそぐわないが、いまさら変えることもできないだろう。

それはさておき、射を重視するこの視点は、理論を非常に柔軟なものにした。以前、フランスで開かれた研究集会のときに、夕食後ワインを飲みながら、グロタンディークが代数幾何にもたらしたアイデアの中で、いちばん影響力の大きいものは何だろう、という話題になったそうである。そのときのセールの答が、この、射を基本的な対象と考える相対的な視点だというもので、それに一同納得したということである。底変換（base change）と対をなす降下(descent)の考えも、こうして可能になったものだが、局所的に考えるという数学の基本的な手法の射程が、はるかに拡張されている。

SGA１

IHES で開かれた「代数幾何セミナー（Séminaire de Géométrie Algèbrique）」の１年目(1960/61)の記録である。EGA と SGA に、同時期に書かれたブルバキ・セミナーでの報告も合わせると、全体で 7,500 ページにのぼる膨大なものである。

SGA1 で扱われているのは、代数的基本群である。基本群とガロワ群は、実は同じものであるという視点を全面にうちだし、圏論的に根の置換とは何かという問題を、明らかにしたものである。この方法は、のちのモチーフの理論でも、淡中圏の基本群として再登場する。

正標数の代数曲線の基本群は、同じ種数のリーマン面の基本群の射影有限完備化の商である。これを、変形理論を使って曲線を標数０へもち上げることで、鮮やかに証明する。これは、それから 50 年近くたった今でも、ただ１つの証明だろう。

SGA４，５

エタール・コホモロジーを定義し、それを使って、合同ゼータ関数の有理性と関数等式を証明している。グロタンディークの業績の中でも、いちばん有名なものかもしれない。「交信録」をみれば、セールとグロタンディークが、ともにヴェイユ予想の解決への鍵であるコホモロジー理論をめざして研究を進めていたことがわかる。

エタール・コホモロジーの定義への道を開いたのは、セールによる、代数幾何におけるファイバー束の定義だったらしい。ファイバー束が定義できるということは、コホモロジーでいえばH^1が定義できたということになる。あとは、これを拡張すればよい。グロタンディークはこの考えに基づいて、エタール・コホモロジーの理論を建設したということである。その根底となるのは、位相空間そのものよりも、その上の層全体のなす圏のほうが本質的であるという、トポスの考えである。

合同ゼータ関数の有理性は、それ以前にドウォークにより別の方法で証明されていたが、エタール・コホモロジーのレフシェッツ跡公式を示すことで、ヴェイユの予言した証明を与えた。関数等式も、同じく、ポワンカレ双対性から導かれた。これについては、臨場感あふれる手紙が、「交信録」に収録されている。

エタール・コホモロジーというと、ヴェイユ予想の証明が有名だが、数論への影響からいうと、ガロワ表現を構成できるようになったことの意義は計り知れない。それ以前には、有限次ガロワ拡大を構成して作る以外には、類体論から存在が示されるもの、アーベル多様体の等分点から作るものぐらいしか、構成法はなかった。現在でも代数幾何と結びつかない保型形式には、ガロワ表現を構成する手段がないことを考えると、その重要性がわかる。ここでも相対的な視点により、整数環上のスキームは、有限体上のスキームを束ねたものと考えられることが、鍵となっている。

セールは、ラマヌジャンのデルタ関数とよばれる保型形式にともなうガロワ表現があったと仮定して、その性質を調べていた。このガロワ表現は、エタール・コホモロジーを使って、ドリーニュによって構成された。保型形式にともなうガロワ表現は、志村五郎によって、モジュラー曲線のヤコビアンという、アーベル多様体の等分点を使って構成されていたものが、佐藤幹夫のアイデアに基づく幾何的な構成にエタール・コホモロジーを適用することで、大きく一般化されたのである。ドリーニュは、この幾何的な構成によって、ラマヌジャン予想をヴェイユ予想に帰着させた。そしてヴェイユ予想も証明することで、ラマヌジャン予想が解決されたのだった。

グロタンディーク自身が、数論にどのくらい関心があったのかはよくわからないが、この、保型形式にともなうガロワ表現の構成が数論にもたらしたものは、実に大きい。ワイルズとテイラーによるフェルマー予想の解決もその１つである。解決されたばかりの、楕円曲線のＬ関数に関する佐藤・テイト予想もそうである。これらは、ある種の条件をみたすガロワ表現は、エタール・コホモロジーを使って構成される保型形式にともなうガロワ表現ですべて尽くされる、というタイプの定理から導かれる。これは、類体論を１次元の理論と考えれば、その高次元化にあたる。

類体論でいえば、これは、アーベル拡大はすべて類体であるという相互法則にあたる。それに対し、保型形式にともなうガロワ表現の構成は、類体の存

在定理にあたる。類体論では、相互法則が存在定理より先に証明されるが、その高次元化では、話が逆になるのが興味深い。ラフォルグによる、有限体上の関数体でのラングランズ対応の証明では、L 関数の関数等式が、これもエタール・コホモロジーを使って先に証明されていたので、逆定理によって、相互法則にあたるほうがそれ以前にわかっていた。このあたりには、まだ解明されていない謎が残っている。

話はとぶが、代数解析の D 加群の理論は、エタール・コホモロジーの理論とほぼ同時期に独立に平行して、佐藤幹夫や柏原正樹によって構築された。この両者には、著しい類似がある。D 加群に対応する構成可能層についての特性類の理論は、SGA5 をモデルにしたものだった。

SGA 6

リーマン・ロッホの公式は、1957 年のグロタンディークの代数幾何への華々しいデビューを飾るものである。しかし自分ではその論文を書かず、ボレルとセールがかわりに書いた。SGA6 では、この公式の背景となる理論の全貌が姿を現している。

ここでのリーマン・ロッホの公式は、単なる次元の公式ではなく、相対的な視点により、関手の射として定式化されている。こうして、リーマン・ロッホの公式は、格段に柔軟で広がりをもつものになった。ここにも、もっとも自然な枠組みは何かを突きつめていく、グロタンディーク独特の方法がよく現れている。

SGA6 では、0 次の K 群だけが導入されたが、これはクィレンによる高次 K 群、さらにベイリンソンによるモティヴィック・コホモロジー群の定義、そして L 関数の特殊値の研究へとつながっていった。

SGA 7

SGA の最終年(1967/69)となったものである。２冊目は、ドリーニュによるヴェイユ予想の解決の道具となった、消失輪体やレフシェッツ束の解析であるが、そこにはもうグロタンディークの姿はない。１冊目の最後で、アーベル多様体のネロン・モデルを扱っているのが、グロタンディークの数学との別れ以前の最後の論文かもしれない。

アーベル多様体は、1 次のエタール・コホモロジーH^1を体現する対象である。高次のコホモロジーについては、まだよくわからないことが多いが、H^1については、SGA7 でほぼ調べつくされた感がある。ここでは、局所体上のアーベル多様体について、その還元という幾何的な現象が、ガロワ群の作用で統制されるという、安定還元定理が証明されている。また、ℓ進係数と p 進係数が、違いはあるものの、平行して扱われている。こうした考察が、p 進コホモロジーの神秘関手やモチーフの発想へとつながっていったのだろう。

マンフォードは、スキーム論を用いて、幾何学的不変式論を構築し、代数曲線やアーベル多様体のモジュライを構成した。さらに、ドリーニュとの共著論文で、アーベル多様体の安定還元定理から代数曲線の安定還元定理を導き、代数曲線のモジュライのコンパクト化を構成した。これは、その後の、ファルティングスによる、アーベル多様体のテイト予想、そして代数曲線のモーデル予想の証明で、決定的に重要な役割を果たしている。

グロタンディークの数学

グロタンディークの業績を振り返ってきたが、それが、その後の代数幾何、数論幾何にもたらしたものは、あまりに巨大である。簡単に紹介した、ドリーニュ、マンフォード、クィレン、ファルティングス、ラフォルグの業績は、どれもフィールズ賞の栄誉をうけた。

こうしてみると、リーマン・ロッホの定理や、エタール・コホモロジーのレフシェッツ跡公式といった大定理が、輝きを放っている。しかし、それよりも強く感じられることは、これらの定理の証明を追い求めたというよりは、理論を構築するうちに、こうした定理が自然に得られるような枠組みを作り上げたという印象である。これは、ドリーニュによるヴェイユ予想の証明や、ワイルズによるフェルマー予想の解決からうける印象とは、異質である。これが、グロタンディークの強烈な個性だけによるものか、それとも、分野の性格にもよるものなのかは、よくわからない。

最近、数学を専門として勉強し始めた学生向けの授業をうけもつ機会が多い。今の数学のカリキュ

ラムでは、まず抽象的な数学の思考法に慣れることが重要になる。そこで、抽象数学では、記号はただの記号であることがだいじだが、ただの記号と思ってはいけないなどという話をする。矛盾しているようだが、いいたいのはこんなことである。ただの記号であるとは、どんなものでもあてはめてよいということである。そう思ってはいけないというのは、記号にあてはめられるものには、実に多様なものがあり、それらについての実体感抜きでは、本当の理解にはならないというつもりである。

しかし、グロタンディークは、スキームXといえば、ただXだと思っていたのではないかという気もしてくる。とすると、そんな話をしても、未来のグロタンディークにとっては、余計なお世話かもしれない。でもグロタンディークだからこそ、それでよかったのだとも、一数学者としては思うのである。

[さいとう　たけし]