代数曲線の基本群に関する Grothendieck 予想について

中村　博昭（都立大理）
玉川安騎男（京大数理研）
望月　新一（京大数理研）

1. Introduction

有理数体上有限生成な体の上の双曲的代数曲線が「（幾何的）基本群への外 Galois 作用」あるいは「数論的基本群」によって完全に決定されるという Grothendieck の予想の解決がわれわれの主な結果です。この結果の正確な定式化は次節に譲るとして、この節では、まず二つの「」の中を説明します。

1.1. 代数多様体の基本群への外 Galois 作用

X を $\mathbf{C}$ 上の代数多様体とし、x をその上の点とします。$\mathbf{C}$ の通常の位相によって X を位相空間と見る時、基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X,x)$ が定まり、X の位相的な被覆全体を統制します。（$\pi_1^{\mathrm{top}}(X,x)$ は基点 x を取り替えても内部自己同型を除いて標準的に同型なので、しばしば $\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ と略記します。）より正確には、X の被覆全体のなす圏と $\pi_1^{\mathrm{top}}(X,x)$ が作用する集合全体のなす圏とが、被覆 $f:Y\to X$ に対して fiber $f^{-1}(x)$ を対応させることによって圏同値になります。

この対応で有限次被覆に対応するのは、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ が作用する有限集合、あるいは同値なことですが、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ の profinite 完備化 $\pi_1^{\mathrm{top}}(X)^\wedge$ が連続に作用する有限集合です。ここで、群 Γ に対して

$$\Gamma^\wedge \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{N\triangleleft\Gamma,\ [\Gamma:N]<\infty} \Gamma/N.$$

以下では $\pi_1^{\mathrm{top}}(X)^\wedge$ を単に $\pi_1(X)$ で表します。つまり、$\pi_1(X)$ は、X の有限次被覆全体を統制する（位相）群と考えることができます。

さて、X が $\mathbf{C}$ の部分体 K 上定義されている場合には、各 $\sigma\in\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K)$ が X に作用しますが、この作用は一般には（通常の位相に関して）連続でないので、$\pi_1^{\mathrm{top}}(X)$ の自己同型を引き起こしません。ところが、Riemann の存在定理によって、X の有限次被覆には自動的に代数多様体の構造がただ一つ入りますので、被覆を定義する「多

項式」の係数（$\in \mathbf{C}$）に σ を作用させることによって別の有限次被覆が得られます。これを群の言葉に翻訳することにより、$\pi_1(X)$ の（連続な）自己同型が引き起こされることがわかります。但し、正確には、σ は $\pi_1(X,x)$ から $\pi_1(X,\sigma(x))$ への同型を引き起こすだけなので、内部自己同型の不定性が生じます。すなわち、準同型

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Aut}(\pi_1(X))/\,\mathrm{Inn}(\pi_1(X))$$

が定義されます。Riemann の存在定理によって入る X の各有限次被覆の代数多様体の構造は、実は $\overline{K}$ 上定義されるので、この準同型が全射 $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ を経由することがわかります。このようにして profinite 基本群 $\pi_1(X)$ の上の外 Galois 表現

$$\mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X))$$

が得られます。

1.2. 代数多様体の数論的基本群

1.1 では、$\mathbf{C}$ 上の代数多様体 X に対して、X の位相的基本群の profinite 完備化として $\pi_1(X)$ を定義しましたが、有限次被覆の理論は、finite étale 被覆の理論として任意の体上の代数多様体（あるいはより一般にスキーム）に対して純代数的に展開でき、それにより、任意の体 K 上の代数多様体 X の profinite 基本群 $\pi_1(X)$ も純代数的に定義することができます。K が代数閉体でない時には、$\pi_1(X)$ は、$X_{\overline{K}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} X \otimes_K \overline{K}$ の（すなわち「幾何的な」）有限次被覆だけでなく、K の有限次（分離）拡大 K'/K から定義される X の被覆 $X_{K'} \to X$、あるいはそれらの混合をも統制します。その様子は、次の完全列によって捉えられます。

$$1 \to \pi_1(X_{\overline{K}}) \to \pi_1(X) \stackrel{\mathrm{pr}_X}{\to} \mathrm{Gal}(K) \to 1.$$

$\pi_1(X)$ — あるいは $\pi_1(X)$ と $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ の組 — を（体 K が何らかの意味で「数論的」である時に）数論的基本群と呼び、それに対して $\pi_1(X_{\overline{K}})$ を幾何的基本群と呼びます。

上の完全列において、$\pi_1(X_{\overline{K}})$ は $\pi_1(X)$ の正規部分群ですから、共役をとることによって準同型 $\pi_1(X) \to \mathrm{Aut}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$ が定まりますが、これは $\pi_1(X_{\overline{K}})$ の元を内部自己同型に移すので、外 Galois 表現

$$\rho_X : \mathrm{Gal}(K) = \pi_1(X)/\pi_1(X_{\overline{K}}) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$$

を引き起こします。K が $\mathbf{C}$ の部分体の時には、$\pi_1(X_{\overline{K}})$ は $\pi_1(X_{\mathbf{C}})$ と一致し、この外 Galois 表現は 1.1 で考えたものと一致します。また、今は $\mathrm{pr}_X : \pi_1(X) \to \mathrm{Gal}(K)$ から出発して $\rho_X : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1(X_{\overline{K}}))$ を群論的な操作によって定義しましたが、$\pi_1(X_{\overline{K}})$ の中心が自明な時には、逆に ρ_X から群論的な操作によって pr_X を復元することができ、両者の持つ情報は完全に一致します。つまり、この場合「幾何的基本群への外 Galois 作用」を考えることと「数論的基本群」を考えることは同等です。

最後に、pro-l 基本群にふれておきます。l を素数とする時、pro-l 群とは有限 l- 群の射影極限として表せる位相群のことをいいます。profinite 群 Π に対し、Π の最大 pro-l 商を Π^l で表します。具体的には、

$$\Pi^l \overset{\mathrm{def}}{=} \varprojlim_{N \underset{\mathrm{open}}{\triangleleft} G,\ [G:N]=l\text{-power}} \Pi/N.$$

体 K 上の代数多様体 X に対し、その幾何的、数論的 pro-l 基本群をそれぞれ次のように定義します。

$$\pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}) = \pi_1(X_{\overline{K}})^l,$$
$$\pi_1^{(l)}(X) = \pi_1(X)/\operatorname{Ker}(\pi_1(X_{\overline{K}}) \to \pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}})).$$

この時、完全列

$$1 \to \pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}) \to \pi_1^{(l)}(X) \overset{\mathrm{pr}_X^{(l)}}{\to} \mathrm{Gal}(K) \to 1$$

及び外 Galois 表現

$$\rho_X^{(l)} : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{(l)}(X_{\overline{K}}))$$

が引き起こされます。

2. Grothendieck 予想

1.2 で述べた代数多様体（あるいはスキーム）の基本群の理論は、1960 年代初めにいわゆる「SGA1」の中で Grothendieck によって展開されたものです。1980 年代に入って、Grothendieck は次のような予想を提出しました。

予想. K を有理数体上有限生成な体、C を K 上の双曲的代数曲線、S を K 上 smooth な代数多様体とする。この時、

$$\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}(S,C)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom\,ext}_{\mathrm{Gal}(K)}^{\mathrm{open}}(\pi_1(S),\pi_1(C)).$$

まず、用語や記号の説明をします。代数曲線 C に対し、C^* を C のコンパクト化、$\Sigma = C^* - C$ とし、g を C^* の種数、ν を $\Sigma(\overline{K})$ の元の数とします。Euler-Poincaré 標数 $2-2g-\nu$ が負の時、C を双曲的といいます。($K \subset \mathbf{C}$ の時は、Riemann 面 $X_{\mathbf{C}}$ の普遍被覆空間が上半平面と複素解析的に同型ということと同値です。) 同型の左辺 $\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}(S,C)$ は S から C への K 上の射で dominant なもの全体の集合を表し、右辺 $\mathrm{Hom\,ext}_{\mathrm{Gal}(K)}^{\mathrm{open}}(\pi_1(S),\pi_1(C))$ は、$\pi_1(S)$ から $\pi_1(C)$ への連続開群準同型で $\mathrm{Gal}(K)$ への射影 $\mathrm{pr}_S, \mathrm{pr}_C$ と両立するもの全体の集合を modulo $\mathrm{Inn}(\pi_1(C_{\overline{K}}))$ で考えたものを表します。

この予想の意味は、「K 上の双曲的代数曲線はその数論的基本群から完全に復元される」ということです。一つの見方は、S も (別の) 双曲的代数曲線 C' である場合を考えてみます。すると、上の予想は K 上の双曲的代数曲線の圏 (射は dominant なものだけ考える) から $\mathrm{Gal}(K)$ 上の profinite 群の圏 (射は開なものだけを modulo 内部自己同型で考える) への関手 π_1 が忠実充満ということで、特に

(*) 「数論的基本群が同型な K 上の双曲的代数曲線は同型である」

ことが従います。もう一つの見方は、とりあえず dom とか open とかを忘れて (下の注 (iii) 参照) 左辺を C の S- 有理点集合と見ます。曲線 C を復元するということは、すべての S に対して C の S- 有理点集合を復元するということで、上の予想はそれが右辺のように C の数論的基本群から復元されることを言っています。

上の予想は、種数 0 の場合の中村の研究、種数一般でアフィンの場合の玉川の研究をへて、最終的に望月によって上の形で証明されました。(中村、玉川の研究は、主に (*) を扱います。) 三人の研究において、群論的対象から幾何学的対象を復元したいという心やそれに伴ういくつかのテクニックは共通ですが、それぞれの数論的な観点は全く異なります。以下 3、4、5 節でそれぞれの研究を紹介します。(非常に簡単に言えば、中村の研究は大域体上、玉川の研究は有限体上、望月の研究は p 進体上にその基礎をおきます。)

注. (i) Grothendieck 自身も注意しているように、上の予想は Faltings によって証明されたアーベル多様体の Tate 予想と類似しています。(相違点については 5 節参照。)

(ii) Grothendieck は、一般に「anabelian」な代数多様体については、その数論的基本群から元の多様体が完全に復元できることを予想しています。（但し、上のような精密な予想が与えられたのは曲線の場合だけです。）いまだに anabelian 多様体という概念には定義がありませんが、「abelian からほど遠い基本群によってその幾何が統制される多様体」というような意味と考えられており、例えば、双曲的曲線の successive smooth fibrations として表せるような多様体や、双曲的曲線のモジュライ空間などがその例だと考えられています。（Grothendieck 自身は、偏極アーベル多様体のモジュライ空間も anabelian だろうと考えていたようですが、これは最近の伊原 - 中村の研究により否定されています。）

(iii) 上の予想において、簡単のため C を射影的（$C = C^*$）と仮定します。この時、左辺の dom と右辺の open を取ってもなお両辺の同型が成立することが Grothendieck によって予想されており、しばしば「Section 予想」と呼ばれる重要な未解決問題です。特に S が 1 点 $\mathrm{Spec}(K)$ の時には、左辺は C の K- 有理点全体の集合、右辺は $\mathrm{pr}_C : \pi_1(C) \to \mathrm{Gal}(K)$ の連続、群論的な sections 全体の集合を modulo $\mathrm{Inn}(\pi_1(C_{\overline{K}}))$ で考えたものとなり、C の K- 有理点に関する Diophantus 問題と関係することが知られています。（なお、C がアフィンの場合は、いわゆる「tangential sections」の存在により、Section 予想の定式化を少し修正する必要があります。）

3. 中村の仕事の紹介

K を有理数体上有限生成な体、C を K 上の代数曲線とし、2 節の記号で $g = 0$（$C^*_{\overline{K}} \simeq \mathbf{P}^1_{\overline{K}}$）、$\nu \geq 3$（双曲的）とします。$C$ をその数論的基本群から復元することに成功した中村の手法は、pro-l 基本群上の外 Galois 表現 $\rho_C^{(l)} : \mathrm{Gal}(K) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{(l)}(C))$ の核に対応する K の（無限次 Galois）拡大体が、$\Sigma_{\overline{K}} \subset C^*_{\overline{K}} \simeq \mathbf{P}^1_{\overline{K}}$ の座標から「複比」と「l 乗根」を繰り返し取ることによって具体的に構成される $\overline{K}$ の元たちによって生成されることを示した Anderson- 伊原の研究によって動機付けられました。中村は、C の数論的基本群から Σ の座標を復元するために、K のより小さい拡大体を群論的に切り出すことを考えました。

そのために有用となるのは、Σ の点に対する惰性群たち $\subset \pi_1(C_{\overline{K}})$ を群論的に特徴付ける次の補題です。（この補題には、種数の制限はありません。）

補題. $\pi_1(C_{\overline{K}})$ の閉部分群 J がある Σ の点に対する惰性群に一致するための必要十分条件は、次の三つの条件が成り立つことである：

(i) $J \simeq \hat{\mathbf{Z}}$ で、その $\pi_1(C_{\overline{K}})$ における正規化群は J 自身である。

(ii) J の $\pi_1(C)$ における正規化群を $N(J)$ とする時、$\mathrm{pr}_C(N(J))$ は $\mathrm{Gal}(K)$ の開部分群である。

(iii) (i) によって $1 \to J \to N(J) \to \mathrm{pr}_C(N(J)) \to 1$ が完全列になるが、これから引き起こされる $\mathrm{pr}_C(N(J)) \to \mathrm{Aut}(J) = \hat{\mathbf{Z}}^\times$ は円分指標である。

注. (i) この補題は、基本群という非可換な対象の中で惰性群の合併和のような群演算で閉じない部分集合を「Frobenius 固有値」で識別している 'anabelian' weight filtration と見ることができます。

(ii) Σ の各点に対する分解群 $\subset \pi_1(C)$ は、惰性群の $\pi_1(C)$ における正規化群として復元されます。

まず簡単のため、$C^* = \mathbf{P}^1_K, \Sigma = \{0, 1, \infty, \lambda\}$ $(\lambda \in K - \{0,1\})$ とします。この時、各自然数 n に対して、$0, \infty$ のみで分岐する $\mathbf{P}^1_{K(\boldsymbol{\mu}_n)}$ の n 次巡回被覆たちに対応する $\pi_1(C)$ の開部分群たちは、上の惰性群の特徴付けを用いて群論的に特徴付けられます。各被覆における $1, \lambda$ の fibers の剰余体あるいはそれらの合成体は、$1, \lambda$ に対する分解群の言葉で記述でき、そのようなすべての被覆を走ってその合成体の共通部分を取ることにより、K の拡大体 $K(\boldsymbol{\mu}_n, \lambda^{1/n})$ が復元されます。これから Kummer 理論と $\mathbf{Z}$ 上有限生成な整域の単数群の有限生成性（Dirichlet の単数定理の拡張）を用いて $K^\times$ の部分群 $\langle\lambda\rangle$ が復元でき、更に Σ を別の 4 点（$\supset \{0, 1, \infty\}$）に移すような座標変換を考えて、$\langle 1-\lambda\rangle$ や $\langle\lambda/(\lambda-1)\rangle$ も復元され、これらから座標 λ が完全に復元されます。

$\nu > 4$ の場合は、上述の惰性群の特徴付けを用いて、Σ のさまざまな $(\nu - 4)$ 点を埋めることによって 4 点の場合に帰着します。また、C^* が必ずしも $\mathbf{P}^1_K$ と同型でなかったり Σ の点が必ずしも K-有理的でなかったりする一般の場合には、descent を用いて証明します。

以上の中村の仕事は、代数曲線の Grothendieck 予想に関する初めての結果でした。

中村は、更に pro-l 基本群における Grothendieck 予想の類似を導入し、pro-l 写像類群の weight filtration を用いて pro-l 外 Galois 表現における Galois 像を記述するという方法によって

$$\mathrm{Aut}_K(C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut\,ext}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1^{(l)}(C))$$

となる例を初めて与えました。また、そのような例を角皆宏・高尾尚武らとともに高種数の曲線やその配置空間の場合にも研究しました。

4. 玉川の仕事の紹介

玉川は、まず有限体上の曲線に対して Grothendieck 予想の類似を考えました。この節では k を有限体とし、C をその上の双曲的曲線とします。玉川の証明の方針は、関数体 $k(C)$ がその絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(k(C))$ から復元されることを示した内田の仕事を基にしており、大きく三つのステップに分かれます：(i) C^* の各閉点に対する分解群の群論的特徴付け；(ii) 乗法群 $k(C)^\times$ の復元；(iii) $k(C) = k(C)^\times \cup \{0\}$ の上の加法構造の復元。

ステップ (i) では、内田は Brauer 群を用いた Neukirch のアイディアを使いましたが、我我の場合 C の閉点に対する惰性群は消えていて分解群が剰余体（したがって有限体）の絶対 Galois 群と同型になってしまうので、H^2 が消えてしまいます。代わりのアイディアを説明するために、簡単のため $C = C^*$ とします。（実際に玉川が扱ったのはアフィンの場合です。）C の各閉点 x は、連続群準同型

$$\alpha_x : \mathrm{Gal}(k(x)) = \pi_1(\mathrm{Spec}(k(x))) \to \pi_1(C)$$

であって $\mathrm{pr}_C \circ \alpha_x$ が自然な単射 $\mathrm{Gal}(k(x)) \hookrightarrow \mathrm{Gal}(k)$ に一致するようなものを与え、α_x の像が x の分解群となることがわかります。特に x が k- 有理点の場合には、α_x は pr_C の section を与えます。以下簡単のためこの場合を考えます。問題は、勝手に与えられた pr_C の section α がある $x \in C(k)$ に対する α_x となるための条件を群論的に記述することです。（$\mathrm{Gal}(k) \simeq \hat{\mathbf{Z}}$ が自由 profinite 群なので Section 予想の類似そのものは成立しえないことに注意します。）Tikhonov の定理を使って、問題の条件が、α の像を含むような $\pi_1(C)$ の任意の開部分群に対して対応する C の被覆が k- 有理点を持つことと同値であることがわかります。後は、一般に有限体上の（双曲的）曲線が有理点を持つかどうかをその数論的基本群から群論的に判定するという問題ですが、これは Lefschetz 跡公式によって解決されます。

ステップ (ii) は内田の場合とほぼ同様で、$k(C)$ の類体論の相互律を使います。ステップ (i) で C^* の各閉点に対する分解群が復元できたので、Artin 写像の核として $k(C)^\times$ が復元されます。（ここで、C がアフィンであることを使います。$C = C^*$ だと主因子群 $k(C)^\times / k^\times$ しか復元できません。）

ステップ (iii) の説明は省略します。（内田の場合と違って分岐点が有限個しかないので、証明がかなり難しくなっています。）

有限生成体上の（アフィン双曲的）曲線に対しては、適当な有限生成環の上のモデルを取って有限体への reduction を考え、有限体上の曲線の同型を有限生成体上の同型に持ち上げることによって証明します。但し、上で説明した結果そのものではなく、有限体上のアフィン双曲的曲線の tame 基本群に関する類似の結果を用います。（なお、望月は、次節で紹介する仕事以前に、この tame 基本群に関する結果を使って有限生成体上の必ずしもアフィンでない双曲的曲線に対する結果を導きました。）

注. 標数 0 の場合、曲線の幾何的基本群の同型類は (g,ν) のみによって決まりますが、正標数の場合はそうではありません。実際、最近玉川は、$\overline{\mathbf{F}}_p$ 上の種数 0 の曲線の（スキームとしての）同型類がその基本群によって完全に決定されることを証明しました。

5. 望月の仕事の紹介

望月は、p 進体上で Grothendieck 予想を考え、次のような強い帰結を導きました。

定理 1. K を $\mathbf{Q}_p$ 上有限生成な体の部分体とする。C を K 上の双曲的代数曲線、S を K 上 smooth な代数多様体とする時、

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_K^{\mathrm{dom}}(S,C) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom\,ext}^{\mathrm{open}}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1(S),\pi_1(C))\\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom\,ext}^{\mathrm{open}}_{\mathrm{Gal}(K)}(\pi_1^{(p)}(S),\pi_1^{(p)}(C)).\end{aligned}$$

定理 2. K は定理 1 と同じとし、L, M を K 上の（任意次元の）代数多様体の関数体とする。この時、

$$\mathrm{Hom}_K(M,L) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom\,ext}^{\mathrm{open}}_{\mathrm{Gal}(K)}(\mathrm{Gal}(L),\mathrm{Gal}(M)).$$

注. (i) 定理 1、2 のような K としては、$\mathbf{Q}$ あるいは $\mathbf{Q}_p$ 上有限生成な体の他、例えば、自然数 N を固定して $\mathbf{Q}$ のすべての N 次拡大体を合成した体なども含まれます。

(ii) アーベル多様体の Tate 予想は p 進体の上では成立しません。この点が Tate 予想と Grothendieck 予想の数論的性質における大きな相違点で、このことは、（Grothendieck 自身も含め）望月以前には全く気が付かれなかったことです。

(iii) 定理 1 の第一辺と第三辺の同型は、中村によって導入された pro-l 版の Grothendieck 予想を強い形で解決しています。

(iv) K が $\mathbf{Q}$ 上有限生成な場合、定理 2 の Isom 版は Pop の定理でした。Pop の仕事は 、代数体をその絶対 Galois 群から復元した Neukirch- 池田 - 岩澤 - 内田の仕事の流れを汲んでいます。

定理 1 の証明で本質的なのは $[K:\mathbf{Q}_p] < \infty$ の場合で、この場合に望月は p 進 Hodge 理論を使って証明を与えました。

そもそも Grothendieck 予想は、基本群という位相的、étale 的あるいは Galois 表現的な対象と、多様体の射という「関数」的な対象との間の比較定理と見ることができます。一方、p 進 Hodge 理論の核心は、p 進体上の代数多様体における、p 進 étale cohomology という位相的、étale 的あるいは Galois 表現的な対象と、 de Rham cohomology（あるいは crystalline cohomology）という微分加群的、つまりは「関数」的な対象との間の比較定理でした。（この比較定理もまた、 Grothendieck がいわゆる mysterious functor 予想として予言したものでした。）したがって、p 進 Hodge 理論を Grothendieck 予想に使うというアイディアはたいへん自然なものと考えられます。但し、問題は、双曲的曲線という anabelian 的なものの情報をどうやって cohomology という abelian 的なものから引き出すかということで、ここに望月の証明の難しい点があります。

簡単のため $C = C^*$ として、より具体的にアイディアを説明します。この時、$\pi_1^{(p)}(C_{\overline{K}})$ のアーベル化 $\pi_1^{(p)}(C_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}}$ は C の Jacobi 多様体の p 進 Tate 加群と同型で、その Hodge-Tate 分解は、

$$\pi_1^{(p)}(C_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{C}_p \simeq \{\Gamma(C, \Omega^1_{C/K}) \otimes_K \mathbf{C}_p\} \oplus \{H^1(C, \mathcal{O}_C) \otimes_K \mathbf{C}_p(1)\}$$

で与えられます。（$\mathbf{C}_p$ は $\overline{K}$ の p 進完備化を表します。）そこで、$\pi_1^{(p)}(C_{\overline{K}})^{\mathrm{ab}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{C}_p$ の $\mathrm{Gal}(K)$- 不変部分として g 次元 K- 線型空間 $\Gamma(C, \Omega^1_{C/K})$ が復元されます。

ここで、曲線 C は、（hyperelliptic でない場合には） canonical embedding によってこの K- 線型空間に対応する K 上の（$g-1$ 次元）射影空間に埋め込まれます。問題は、その像を数論的基本群から

復元するということです。これまでは、基本群の abelian な情報しか使っていませんが、ここでは真に anabelian な考察が必要です。

　具体的に望月が解決した最大の問題は、次のようなものです：

「L を、K を含む p 進完備な離散付値体で剰余体が K の剰余体の上の一変数代数関数体になっているものとする。$\mathrm{Gal}(K)$ 上の射 $\alpha : \mathrm{Gal}(L) \to \pi_1(C)$ が与えられた時、α が $\mathrm{Spec}(K)$ 上の射 $\mathrm{Spec}(L) \to C$ から来るかどうか（すなわち幾何的かどうか）を群論的に判定せよ。」

この問題の解決には、さまざまな p 進的なテクニック、とりわけ p 進 Hodge 理論の modulo p^N 版（C のみでなく C の各被覆に対して適用）が有効に使われます。

　なお、定理 2 は、M の K 上の超越次数に関する帰納法を用いて超越次数 1 の場合に帰着され、この場合は本質的に定理 1 （のある一般化）に帰着されます。