数学入門公開講座

平成９年８月４日（月）から８月８日（金）まで

京都大学数理解析研究所

講師及び内容

1．代数曲面の世界 （6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　中山　　昇

2変数の多項式 $F(X, Y)=0$ で定義された図形というと、たとえば

$$F(X, Y)=(X/a)^2+(Y/b)^2-1=0,\ F(X, Y)=Y-X^2=0,\ F(X, Y)=XY-1=0,\ \ldots$$

など、楕円、放物線、双曲線、といろいろ思い浮かびますが、代数幾何学ではもっと一般に n 変数の k 個の多項式

$$F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ F_2(X_1, X_2, \ldots, X_n),\ \ldots,\ F_k(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

の共通零点集合を研究しています。たとえば $XY=Z^3+W^3=1$ で定義される図形は K3 曲面という名前の曲面の1部分になります。代数曲線、代数曲面はこのような図形（代数多様体）の中でそれぞれ1次元、2次元のものです。代数曲線は種数によって大きく性格が異なります。代数曲面では種数だけでは足りなくて小平次元を考えます。今回は代数曲面の小平次元による分類の概略を紹介します。

2．数値積分と複素関数論 （6時間15分）

京都大学数理解析研究所・教授　森　　正武

台形公式、シンプソン公式、ガウス公式などはコンピュータ出現のはるか以前に確立した数値積分の基本的な手法であり、その後、数学解析の対象としては比較的地味な存在であった。しかし、解析の道具として複素関数論を導入すると、状況は一変する。各々の公式は複素対数関数の有理関数近似によって導かれ、また誤差解析もグラフィックスと組み合わせて魅力ある対象となる。さらに、新しい強力な数値積分公式を次々と創り出すことができる。

この講義では、数値積分と複素関数論という二つの古典的テーマにコンピュータを組み合わせて実を結んだ、応用数理の新しい成果を紹介する。

3．「超対称性の物理と数学」（6時間15分）

京都大学数理解析研究所・助教授　河合　俊哉

超対称性（supersymmetry）とはボゾン（互いに可換な粒子）とフェルミオン（互いに反可換な粒子）の間に成り立つ対称性であり、現在の理論物理の様々な分野で活躍している。また数学との関係も極めて密接である。本講座では、この超対称性の入門的解説を中心に行なうとともに、その応用にも触れたいと思っている。

時　間　割

時間＼日	8月4日(月)	5日(火)	6日(水)	7日(木)	8日(金)
10：30～11：45	中山	中山	中山	中山	中山
11：45～13：00	休　憩				
13：00～14：15	森	森	森	森	森
14：15～14：45	休　憩				
14：45～16：00	河合	河合	河合	河合	河合

代数曲面の世界

京都大学数理解析研究所・助教授　中　山　　昇

1997, AUGUST 4,5,6,7,8,　10:30 ~ 11:45

代数曲面の世界

中山　昇

1. 代数幾何学 — 代数多様体の研究

代数多様体 (algebraic variety) とは素朴には代数方程式（多項式）の共通零点集合，つまり「式」で定義される図形（多様体）です。しかし大事なのは「式」そのものではありません。たとえば座標変換をして別の式に変わったとしてもそれはその多様体の別の表わし方だと考えます。座標変換などで変わらない性質にこそ代数多様体の真の姿を見いだせるのです。代数幾何学では通常は複素数の範囲で考えます。代数学の基本定理：全ての 1 変数複素係数の代数方程式はかならず複素数解をもつはその理由の一つです。複素数全体を $\mathbb{C}$ と書きます。n 次元アフィン空間 (affine space) を

$$\mathbb{C}^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in \mathbb{C}\}$$

と n 個の複素数の組のなす集合と定義します。

例 1. $\mathbb{C}$ をアフィン直線，$\mathbb{C}^2$ をアフィン平面と呼びます。複素数は二つの実数 a, b によって $a + bi$ (i は虚数単位 $i = \sqrt{-1}$) と書けるので $\mathbb{C}$ は自然に実平面 $\mathbb{R}^2$ と同一視できます。それで $\mathbb{C}$ を複素平面とも呼びます。したがって実際には $\mathbb{C}^n$ は $\mathbb{R}^{2n}$ であって $2n$ 次元なのですが，この $2n$ を実次元，n を複素次元といいます。

アフィン空間 $\mathbb{C}^n$ 上の函数として n 変数多項式

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum a_{m_1, m_2, \ldots, m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$$

を考えることができます。この多項式全体を n 変数多項式環と呼び $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ と書きます。代数多様体としてアフィン空間は本来は図形（集合＋位相）としての $\mathbb{C}^n$ とこの函数環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots x_n]$ の対として定義されるものです。たとえば指数函数 e^x は $\mathbb{C}$ 上の正則関数ですが，これは代数多様体 $\mathbb{C}$ の函数とは認めないのです。環の説明など詳しいことは省きますが，代数多様体を単に集合として定義しても，通常はそこでどうゆう函数をその代数多様体の函数と見なすのかわかるようになっています。

既約多項式 $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の零点集合

$$V(f) := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, f(x) = 0\}$$

を $\mathbb{C}^n$ のアフィン超曲面と呼びます。

例 2. $\mathbb{C}^2$ の中で $x^3 = y^2$ で定義されるアフィン超曲面（この場合はふつうアフィン超曲線といいます） C を考えます。点 $(x, y) \in X$ に対して $x = t^2, y = t^3$ となる複素数 t がただ一つ定まります。したがって

$$\mathbb{C} \ni t \mapsto (t^2, t^3) \in X$$

という集合としては一対一の写像ができます。この写像は「式」で定義されているので「正則写像」または代数多様体としての「射」(morphism) などと呼ばれます。また

$$X \setminus \{(0,0)\} \ni (x, y) \mapsto y/x \in \mathbb{C}$$

もまた式で定義された逆写像なので $X \setminus \{(0,0)\} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ と書き，両者は「同型」(isomorphic) であるといいます。ところで原点 $(0,0)$ の様子はどうでしょうか？もしも $x, y \in \mathbb{R}$ ならば実際に xy 平面に $x = y^{2/3}$ のグラフを書けばわかりますが，とがった点になります（図1参照）。それでこの点を尖点 (cusp) といいます。複素数のままではどうでしょうか？結果だけ言うと X と正の実数 ε を半径に持つ3次元球面

$$S^3_\varepsilon := \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid |x|^2 + |y|^2 = \varepsilon\}$$

の交点集合は結び目 (knot) という図形になります（図1参照）。 C の原点以外の点は滑ら

図 1. Cusp and Knot

かな点 (smooth point) であるけれど原点は特異点 (singular point) と言われます。このように X と $\mathbb{C}$ は原点では同型ではありません。

アフィン超曲面 $V(f)$ が特異点はヤコビアン (Jacobian) 判定法により決定できます。一般に $\mathbb{C}^n$ の中でのいくつかの多項式達 $f_1(x), f_2(x), \ldots f_k(x)$ の共通零点集合 $V(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ を代数的部分集合といいます。これ（またはこの既約成分）をアフィン代数多様体と一般にいいます。本来の式の共通零点という見方では代数多様体はこのアフィン代数多様体だけ考えればいい様に思いますが実際はもっと拡張したものを考えます。一般の代数多様体はいく

つか有限個のアフィン代数多様体 $V_j\,(1 \leq j \leq l)$ で覆われた図形でその共通部分 $V_i \cap V_j$ は V_i, V_j の中ではそれぞれ代数的部分集合の補集合 V_{ij}, V_{ji} であり同一視 $V_{ij} \simeq V_{ji}$ は代数多様体としての同型となるものです。代数多様体の特異点集合は全体になることはなく，代数的部分集合になります。この補集合つまり smooth point の全体はいわゆる普通の意味での多様体 (manifold)，複素解析的多様体 (complex analytic manifold) です。代数多様体の次元をこの manifold の複素次元として定義します。また特異点のない代数多様体を非特異代数多様体と呼びます。

2. 射影空間

自然数 n を一つ取ります。n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ は $(n+1)$ 個の複素数の組 $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ で少なくとも一つの X_i がゼロでないものの「連比」$(X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$ のなす集合です。ここでこのような二つの複素数の組 $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ と $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_n)$ の連比が等しい，つまり $(X_0 : X_1 : \cdots : X_n) = (Y_0 : Y_1 : \cdots : Y_n)$ となるのはあるゼロでない複素数 α があって

$$X_0 = \alpha Y_0, \quad X_1 = \alpha Y_1, \quad \ldots, \quad X_n = \alpha Y_n$$

となるときに限ります。$\mathbb{P}^n$ の部分集合 U_0 を $X_0 \neq 0$ となる連比 $(X_0 : X_1 : \cdots : X_n)$ のなす集合とします。すると

$$\varphi_0 \colon U_0 \ni (X_0 : X_1 : \cdots : X_n) \mapsto (\frac{X_1}{X_0}, \frac{X_2}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}) \in \mathbb{C}^n$$

という一対一対応が得られます。同様に他の index $1 \leq i \leq n$ についても U_i が $X_i \neq 0$ なる連比の集合として定義できて一対一対応 $\varphi_i \colon U_i \to \mathbb{C}^n$ ができます。一対一対応

$$\phi_{1,0} = \varphi_1 \circ \varphi_0^{-1} \colon \varphi_0(U_0 \cap U_1) \to \varphi_1(U_0 \cap U_1)$$

を見ると

$$V_1 := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, x_1 \neq 0\}$$

と置いたとき $\phi_{1,0}$ は

$$V_1 \ni (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (\frac{1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_n}{x_1}) \in V_1$$

という写像になります。同様に $0 \leq i \neq j \leq n$ に対しての一対一対応 $\phi_{j,i} \colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ を見てみるとこれは

$$V_p := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n \,|\, x_p \neq 0\}$$

という形の $\mathbb{C}^n$ の部分集合の間の似たような写像になっています。このように n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ は $(n+1)$ 枚のアフィン空間 $\mathbb{C}^n$ で覆われていてその共通部分達は先ほどの $\phi_{j,i}$ のような代数多様体としての同型写像で同一視されています。だから $\mathbb{P}^n$ は n 次元非特異代数多様体です。

例 *3.* $n=1$ の時，つまり $\mathbb{P}^1$ を考えます。点 $(1,0)$ を ∞ と書くと $U_1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ なので $\mathbb{P}^1$ は複素平面（アフィン直線） $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を付加して得られています。$\mathbb{P}^1$ を射影直線ともいいます。点 $(0,1)$ は U_1 内では原点 0 です。逆に U_0 は $\mathbb{P}^1$ におけるその原点 0 の補集合です。$U_0 \cap U_1$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ と見なされ張り合わせ写像 $\phi_{1,0}$ は $z \mapsto z^{-1}$ です。また

$$(X:Y) \mapsto (\frac{X\bar{Y}+\bar{X}Y}{|X|^2+|Y|^2}, \frac{-\sqrt{-1}(X\bar{Y}-\bar{X}Y)}{|X|^2+|Y|^2}, \frac{|X|^2-|Y|^2}{|X|^2+|Y|^2})$$

により微分可能多様体として $\mathbb{P}^1$ は 2 次元球面

$$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$$

と同一視できます。

U_0 の補集合は連比 $(0:X_1:\cdots:X_n)$ の全体で自然に $\mathbb{P}^{n-1}$ と同一視できます。無限遠点のようにこれを無限遠超平面ということもあります。変数 $X_0, X_1, \ldots, X_n$ の 1 次式

$$F(X_0, X_1, \ldots, X_n) = a_0X_0 + a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$$

で係数 $a_0, \ldots, a_n$ のうち少なくとも一つがゼロでないものを考えます。すると $\mathbb{P}^n$ の部分集合

$$V(F) := \{(X_0:X_1:\cdots:X_n) \in \mathbb{P}^n \,|\, F(X_0, X_1, \ldots, X_n) = 0\}$$

がうまく定義できて，$V(F)$ は $\mathbb{P}^{n-1}$ と同一視できます。このような $V(F)$ を「超平面」(hyperplane) といいます。非線型の方に拡張して「超曲面」(hypersurface) を考えます。ある自然数 d に対して次数 d の斉次（同次）多項式

$$F(X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sum_{m_0+m_1+\cdots+m_n=d} a_{m_0,m_1,\ldots,m_n} X_0^{m_0} X_1^{m_1} \cdots X_n^{m_n}$$

を考えた時，その零点集合 $V(F) \subset \mathbb{P}^n$ を d 次超曲面といいます。斉次なのでちゃんと $\mathbb{P}^n$ で定義できるわけです。

例 *4.* $\mathbb{P}^2$ 内の 2 次超曲面（これはふつう 2 次曲線といいます）として $C: X_0^2 + X_1^2 = X_2^2$ を考えてみましょう。$C \cap U_0$ はてきとうな座標 (x_1, x_2) によって $1 + x_1^2 = x_2^2$ と表わさ

れます。x_1, x_2 が共に実数ならばこの式は双曲線の方程式です。もとの C の式を座標変換 $Y_0 := X_0, Y_1 := X_2 - X_1, Y_2 := X_2 + X_1$ して書き直すと $C : Y_1Y_2 = Y_0^2$ となります。これを $U_2' := \{Y_2 \neq 0\}$ に制限してみると $y_0^2 = y_1$ のように書けます。これは y_0, y_1 が実数ならば放物線の方程式です。このように楕円，放物線，双曲線は C の式を適当に座標変換し，また適当な U_0 のようなアフィン空間に制限した時の実数からなる点の集合と書けてしまいます。逆に言うと楕円，放物線，双曲線の実体は複素数まで拡張すると同じでこの2次曲線 C になってしまうのです。さらに $C \simeq \mathbb{P}^1$ （同型）があります。これは

$$\mathbb{P}^1 \ni (t_0 : t_1) \mapsto (2t_1t_2, t_1^2 - t_2^2, t_1^2 + t_2^2) \in C$$

で与えられます。これから一般に非特異な2次曲線は $\mathbb{P}^1$ に同型なこともわかります。

一般にいくつかの $(n+1)$ 変数の斉次多項式 $F_1(X), F_2(X), \ldots, F_k(X)$ たちの共通零点集合 $V(F_1, F_2, \ldots, F_k)$ が射影空間 $\mathbb{P}^n$ 内で定義できます。この集合も代数的部分集合と呼びます。実際共通部分 $V(F_1, F_2, \ldots, F_k) \cap U_0$ を見てみると

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) := F_j(1, x_1, x_2, \ldots, x_n), (1 \leq j \leq k)$$

と定義すればこの共通部分は $V(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ であって $U_0 \simeq \mathbb{C}^n$ の代数的部分集合です。またこの逆の操作で $U_0 = \mathbb{C}^n$ の代数的部分集合 W に対して $\mathbb{P}^n$ の代数的部分集合 V で $V \cap U_0 = W$ となるものを作ることができます。したがってアフィン空間内の代数的部分集合は射影空間内の代数的部分集合に拡張されます。それで代数多様体はふつうは射影空間内で定義される既約な代数的部分集合（射影的代数多様体）として考えます。

3. ブローアップ

アフィン平面 $X := \mathbb{C}^2$ の原点 $0 = (0,0)$ と座標 (x, y) を考えます。別のアフィン平面 $\mathcal{U} = \mathbb{C}^2$ から X への正則写像を

$$f : \mathcal{U} \ni (u_1, u_2) \mapsto (u_1u_2, u_2) \in X$$

で定義します。すると逆写像が

$$X \setminus \{(x, y) \,|\, y \neq 0\} \ni (x, y) \mapsto (x/y, y) \in \mathcal{U}$$

と X の部分集合上で定義できます。したがって $X \setminus \{(x, y) \,|\, y \neq 0\}$ と $\mathcal{U} \setminus \{(u_1, u_2) \,|\, u_2 \neq 0\}$ は f によって同型になります。

もうひとつ別のアフィン平面 $\mathcal{V}=\mathbb{C}^2$ から X への正則写像を

$$g\colon \mathcal{V}\ni(v_1,v_2)\mapsto(v_1,v_1v_2)\in X$$

で定義すると逆写像が

$$X\setminus\{(x,y)\,|\,x\neq 0\}\ni(x,y)\mapsto(x,y/x)\in\mathcal{V}$$

と X の部分集合上で定義できて，したがって $X\setminus\{(x,y)\,|\,x\neq 0\}$ と $\mathcal{V}\setminus\{(v_1,v_2)\,|\,v_1\neq 0\}$ は g によって同型になります。

この二つのアフィン空間 $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ を合わせることを考えます。それぞれの部分集合 $\mathcal{U}_0:=\mathcal{U}\setminus\{(u_1,u_2)\,|\,u_1\neq 0\}$ と $\mathcal{V}_0:=\mathcal{V}\setminus\{(v_1,v_2)\,|\,v_2\neq 0\}$ は次の写像によって互いに同型となります。

$$\mathcal{U}_0\ni(u_1,u_2)\mapsto(u_1u_2,u_1^{-1})\in\mathcal{V}_0,\quad \mathcal{V}_0\ni(v_1,v_2)\mapsto(v_2^{-1},v_1v_2)\in\mathcal{U}_0.$$

しかも可換図式

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{U}_0 & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{V}_0\\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g}\\ X & = & X\end{array}$$

があります。

$\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ を $\mathcal{U}_0\simeq\mathcal{V}_0$ を「のりしろ」にして張り合わせて得られる曲面を Y とします。すると f,g により自然に正則写像 $h\colon Y\to X$ が定義されます。それは同型 $Y\setminus h^{-1}(0)\simeq X\setminus\{0\}$ をひきおこします。さて原点の上のファイバー $h^{-1}(0)$ はどうなっているのでしょう？ $Y=\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ なので $\mathcal{U}\cap h^{-1}(0)$ と $\mathcal{V}\cap h^{-1}(0)$ に分けて考えてみます。すると

$$\mathcal{U}\cap h^{-1}(0)=\{(u_1,0)\in\mathcal{U}\},\quad \mathcal{V}\cap h^{-1}(0)=\{(0,v_2)\in\mathcal{V}\}$$

であって $\mathcal{U}\cap\mathcal{V}\cap h^{-1}(0)$ 上で $u_1^{-1}=v_2$ という関係があります。したがって $h^{-1}(0)\simeq\mathbb{P}^1$ です。まとめてみると $h\colon Y\to X$ は原点 0 の外側では同型写像で 0 のファイバーは射影直線 $\mathbb{P}^1$ です。つまり点 $\{0\}$ の代わりに $\mathbb{P}^1$ が入ったわけです（図 2）。この h を X の 0 におけるブローアップ (blow-up) といいます。この Y は $X\times\mathbb{P}^1$ の代数的部分集合として次のように表わすことができます。

$$Y=\{((x,y),(X:Y))\in X\times\mathbb{P}^1\,|\,xY=yX\}.$$

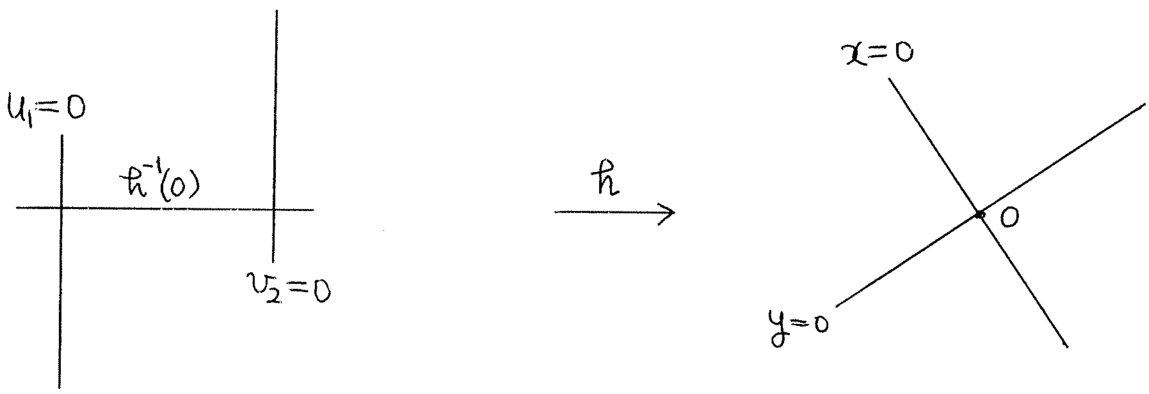

図 2. ブローアップ

このことからブローアップが $\mathbb{C}^2$ の座標 (x,y) の取り方に依らないことがわかります。一般の代数曲面 S とその上の滑らかな点 $x\in S$ に対しても S の x におけるブローアップ $h\colon T\to S$ が定義できます。それは次の性質を持つものとしてただ一つ定まります。

(1) $h\colon T\setminus h^{-1}(x)\simeq S\setminus\{x\}$.

(2) $h^{-1}(x)\simeq\mathbb{P}^1$.

(3) T は $h^{-1}(x)$ のまわりで非特異。

このブローアップの応用をいくつか見てみましょう。

例 5. 例 **2** の平面代数曲線 $C: x^3-y^2=0$ を考えます。$Y\to\mathbb{C}^2$ を原点でのブローアップとして $h^{-1}(C)$ を考えます。$Y=\mathcal{U}\cup\mathcal{V}$ として $h^{-1}(C)\cap\mathcal{U}$ を書いてみると，$x=u_1u_2, y=u_2$ を代入して

$$h^{-1}(C)\cap\mathcal{U}=\{u_2^2(u_1^3u_2-1)=0\}.$$

同様に

$$h^{-1}(C)\cap\mathcal{V}=\{v_1^2(v_1-v_2^2)=0\}.$$

そこで $C'\subset Y$ を

$$C'\cap\mathcal{U}:=\{u_1^3u_2-1=0\},\quad C'\cap\mathcal{V}:=\{v_1-v_2^2=0\},$$

また $E:=h^{-1}(0)$ とおくと $h^{-1}(C)=C'\cup E$ であり，式の上では $h^*(C)=C'+2E$ と書け，C' は特異点がなく C' と E は一点 $(0,0)\in\mathcal{U}$ で接していることがわかります（図 3）。C の原点は特異点でこの E を一点につぶして得られているわけです。

このように平面代数曲線について適当にブローアップを考えると特異点が無くなったりします。実際一般次元の代数多様体でもブローアップが定義され，特異点のある代数多様体の特異点解消が何回かのブローアップの合成によって得られることを広中氏が証明していま

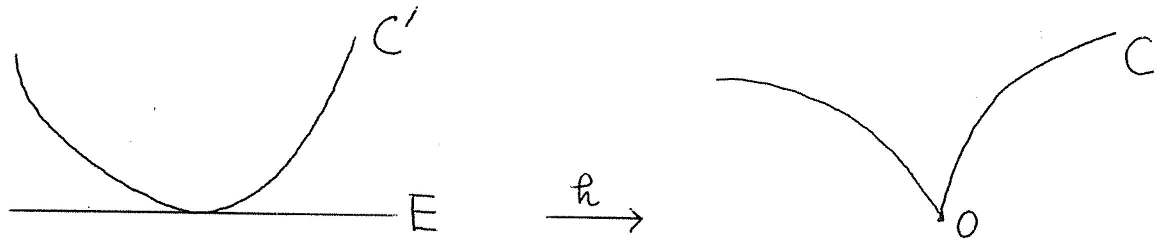

図 3. $h^{-1}(C)$

す。一般に二つの代数多様体 X, Y に対して X のある代数的部分集合 Z の補集合 $X \setminus Z$ 上の正則写像 $f\colon X \setminus Z \to Y$ を考えることが多くなります。例えばブローアップの逆写像です。このような写像はもちろん X 全体では定義できないのですが，これをあたかも X からの写像のように $f\colon X \cdots\to Y$ と書いて有理写像といいます。代数曲面 X からの有理写像 $f\colon X \cdots\to Y$ に対し何回かのブローアップの合成

$$X_n \to X_{n-1} \to \cdots \to X_1 \to X$$

があって合成写像 $X_n \to Y$ が正則写像になるようにすることができます。

例 6. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ から 射影直線への有理写像

$$\mathbb{P}^2 \ni (x:y:z) \mapsto (x:y) \in \mathbb{P}^1$$

を考えてみます。明らかにこの有理写像は点 $P := (0:0:1)$ では定義できません。そこで $\mathbb{P}^2$ をこの点 P でブローアップして考えます。ブローアップ $h\colon S \to \mathbb{P}^2$ は $X := \mathbb{P}^2 \setminus \{z = 0\} \simeq \mathbb{C}^2$ のブローアップ $h\colon Y \to X$ の Y と $\mathbb{P}^2 \setminus \{P\}$ の自然な張りあわせです。合成写像 $f\colon S \to \mathbb{P}^2 \cdots\to \mathbb{P}^1$ を $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset Y$ に制限してみると

$$\mathcal{U} \ni (u_1, u_2) \mapsto (u_1u_2 : u_2) = (u_1 : 1) \in \mathbb{P}^1$$

$$\mathcal{V} \ni (v_1, v_2) \mapsto (v_1 : v_1v_2) = (1 : v_2) \in \mathbb{P}^1$$

なので $f\colon S \to \mathbb{P}^1$ は正則写像です。また f の $E := h^{-1}(P)$ への制限は同型 $E \simeq \mathbb{P}^1$ になります。実際 S は $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ の代数的部分集合として

$$S = \{((x:y:z),(u:v)) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \mid uy = vx\}$$

と表わせ，その第一成分への射影 $S \to \mathbb{P}^2$ がブローアップ h，第二成分への射影 $S \to \mathbb{P}^1$ が f です（図 4）。 f はすべてのファイバー $f^{-1}(Q)\,(Q \in \mathbb{P}^1)$ が $\mathbb{P}^1$ と同型で $h(f^{-1}(Q))$

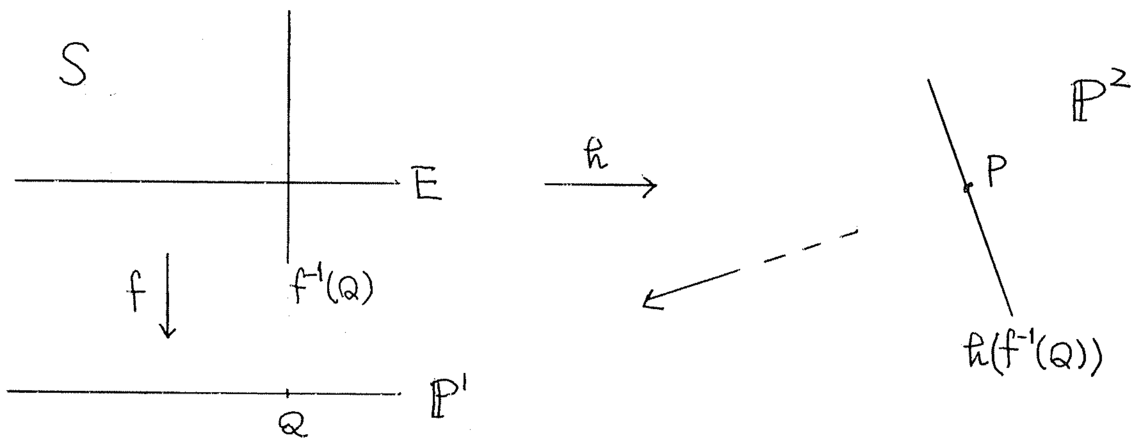

図 4. $\mathbb{P}^2 \cdots \to \mathbb{P}^1$

は原点 P を通る直線になります。したがってこの $\mathbb{P}^1$ は $\mathbb{P}^2$ 内の直線で P を通るもの全体のなす集合とも思えます。

ブローアップで出てくる射影直線 $E := h^{-1}(0)$ を（第一種）例外曲線と呼びますが，最近は (-1)-curve と呼んだりします。これは自己交点数 $E^2 = -1$ だからです。非特異射影的代数曲面の中の二つの曲線 C_1, C_2 に対し交点数 (intersection number) $C_1 \cdot C_2$ が定義できますが，$E^2 := E \cdot E$ を自己交点数というのです。交点数の定義はここでは略します。一方，逆に非特異な代数曲面 Z に含まれる射影直線 $\mathbb{P}^1 \simeq E \subset Z$ が自己交点数 $E^2 = -1$ ならば Z はある別の代数曲面 X のある点におけるブローアップであり E はその例外曲線になります。つまり第一種例外曲線はつぶせる（ブローダウンできる）のです。

例 7. C は非特異代数曲線，$S := \mathbb{P}^1 \times C$ として，点 $0 \in C$ とファイバー $\ell_0 := \mathbb{P}^1 \times \{0\}$ 上の点 $x \in S$ を取ります。$h\colon Y \to S$ を点 x でのブローアップとします。すると $h^{-1}(\ell_0) = \ell \cup E$ と書けます。ここで E は h の例外曲線。ℓ は $h(\ell) = \ell_0$ なる曲線ですが，自己交点数 $\ell^2 = -1$ なので第一種例外曲線です。それでこの ℓ のブローダウン $f\colon Y \to X$ を考えます。この時 $p\colon X \to C$ という正則写像ができますが，$f(E) = p^{-1}(0)$ は $\mathbb{P}^1$ と同型でありまた $X \setminus p^{-1}(0)$ と $\mathbb{P}^1 \times (C \setminus \{0\})$ は同型です（図 5）。一般に $p\colon X \to C$ というスムースな正則写像で全てのファイバー $p^{-1}(c)\,(c \in C)$ が $\mathbb{P}^1$ と同型な時，p を $\mathbb{P}^1$ 束 ($\mathbb{P}^1$-bundle) といいます。今は自明な $\mathbb{P}^1$ 束 $S = \mathbb{P}^1 \times C \to C$ から別の $\mathbb{P}^1$ 束 $p\colon X \to C$ をブローアップとブローダウンで作りました。この操作を点 $x \in S$ における初等変換 (elementary transformation) といいます。全ての $\mathbb{P}^1$ 束 $Z \to C$ はこの自明な $\mathbb{P}^1$ 束から初等変換を何回か繰り返すことによって得られることが知られています。

例 8. 次の式で定義される有理写像 $f\colon \mathbb{P}^2 \cdots \to \mathbb{P}^2$ を考えます。

$$\mathbb{P}^2 \ni (x : y : z) \mapsto (x^{-1} : y^{-1} : z^{-1}) \in \mathbb{P}^2.$$

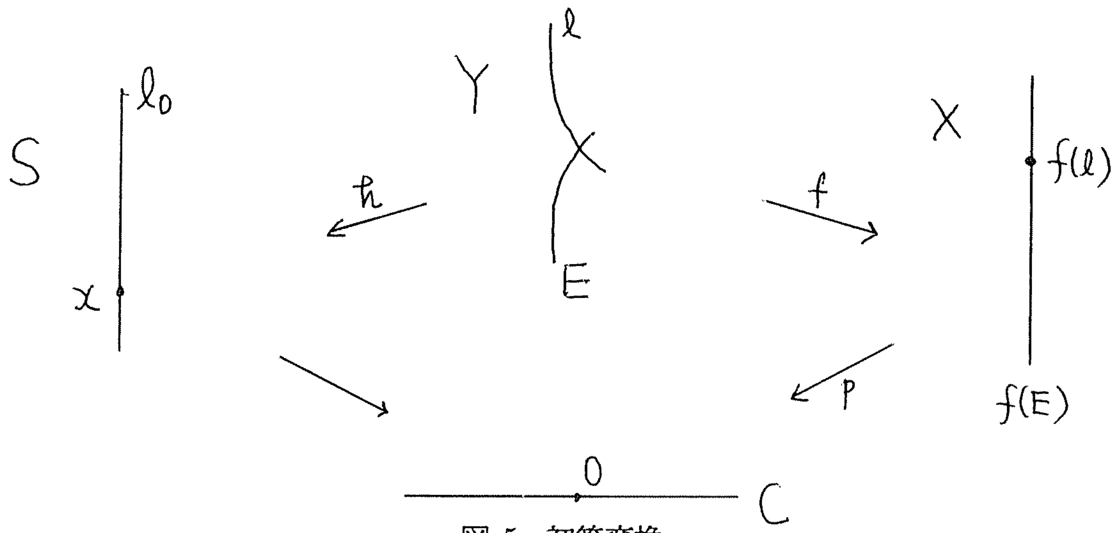

図 5. 初等変換

$\mathbb{P}^2$ 内の 3 本の直線 $L_1 := \{x = 0\}, L_2 := \{y = 0\}, L_3 := \{z = 0\}$ とそれらの交点

$$P_1 := L_2 \cap L_3 = (1:0:0), \quad P_2 := L_3 \cap L_1 = (0:1:0), \quad P_3 := L_1 \cap L_2 = (0:0:1)$$

を考えると f はこの 3 点の外側では正則写像で，3 直線の f による像はそれぞれ $f(L_i) = P_i\,(i = 1,2,3)$ となっています。$h\colon X \to \mathbb{P}^2$ をこの 3 点のブローアップとして，$E_i = h^{-1}(P_i)$ を例外曲線とすると

$$h^{-1}(L_1) = L_1' \cup E_2 \cup E_3, \quad h^{-1}(L_2) = L_2' \cup E_3 \cup E_1, \quad h^{-1}(L_3) = L_3' \cup E_1 \cup E_2$$

と書けます。ここで L_i' は $h(L_i') = L_i$ となる曲線ですが，$L_i \simeq \mathbb{P}^1$ で自己交点数 -1 なので第一種例外曲線です。合成写像 $f \circ h\colon X \to \mathbb{P}^2$ は正則写像になっていてこの写像はこの 3 本の例外曲線 L_i' のブローダウンになっています（図 6）。

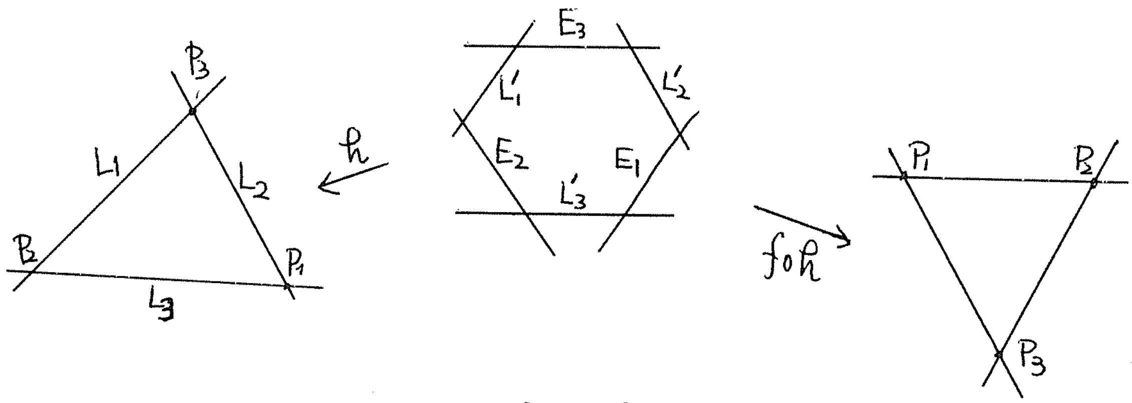

図 6. $\mathbb{P}^2 \cdots \to \mathbb{P}^2$

二つの代数曲面 X, Y が互いに逆写像となる有理写像 $X \cdots \to Y$ と $Y \cdots \to X$ を持つとき両者を双有理同値であるといいます。Y は X から出発してブローアップとブローダウンを何回かくりかえして得られます。与えられた非特異な射影的代数曲面から出発してどんどん第一種例外曲線をブローダウンしていくとついには第一種例外曲線を全く含まない曲面に到

達できます。第一種例外曲線を全く含まない射影的非特異代数曲面を相対的極小曲面 (relatively minimal surface) といいます。

例 9. 楕円曲線は種数 1 の代数曲線ですが，1 次元複素トーラス $\mathbb{C}/L$ でもあります。ここで L は虚数部分 $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ となるある複素数 τ に対して $L = \{m + n\tau \,|\, m, n \in \mathbb{Z}\}$ と表わされる格子 (lattice) です。また $\mathbb{C}/L$ は複素数 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ で $z_1 - z_2 \in L$ なるものを同一視して得られた空間であることを意味します。ちょうど平行四辺形の互いに向き合った辺どうしを合わせた図形なので穴の一つ空いたドーナツの表面になっています。同じような構成方法で n 次元複素トーラスが考えられますが，その中で射影空間の中の代数的部分集合として書けるものをアーベル多様体 (abelian variety) といいます。また 2 次元のアーベル多様体をアーベル曲面といいます。1 次元トーラスはワイエルシュトラスの $\wp$ 函数によって必ず $\mathbb{P}^2$ 内の 3 次曲線として表わせます。$\mathbb{P}^1$ からアーベル多様体への正則写像は必ず定数写像になります。これはこの写像がそれぞれの普遍被覆空間どうしの写像 $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{C}$ に持ち上がらなければならないことからわかります。したがってアーベル曲面は相対的極小曲面です。

4. 代数曲面の分類

代数曲面 X から決まるいろいろな量があります。種数 $p_g(X)$，不正則数 $q(X)$，ベッチ数 (Betti number) $B_1(X) = 2q(X), B_2(X)$，チャーン数 (Chern number) $c_1^2(X), c_2(X) = 2 - 2B_1(X) + B_2(X)$，多重種数 $P_m(X)$，小平次元 $\kappa(X)$，などなど。双有理不変量というのは X, Y が双有理同値ならばその X, Y における値は等しいという性質をもつ量です。たとえば $p_g, q, P_m, \kappa, \chi := (c_1^2 + c_2)/12 = 1 - q + p_g$ などがそうです。これらの量の定義には微分形式などの準備が必要なので略しますが，代数曲面は表 1 のように分類されます。$K3$

小平次元 κ	不正則数 q	曲面
$-\infty$	0	射影平面 $\mathbb{P}^2$ と双有理同値
	> 0	種数 q の曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束と双有理同値
0	0	K3 曲面またはエンリケス (Enriques) 曲面と双有理同値
	1	超楕円曲面 (hyper-elliptic surface) と双有理同値
	2	アーベル曲面と双有理同値
1		楕円曲面
2		一般型曲面

表 1. 曲面の分類

曲面はたとえば $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 4 次超曲面がそうですが，代数曲面が研究されて初めて出てきた新しい曲面です。2 次形式の理論やホッジ構造論などで詳しい研究がなされています。また楕円曲面 X は代数曲線 C への楕円ファイバー空間 (elliptic fibration) $X \to C$，つまり一般ファイバーが楕円曲線となる正則写像，の構造を持つ曲面ですが，周期写像の理論によって，特異ファイバーの表われ方など詳細な研究がなされています。一般型曲面は今もって解明されない問題の多い曲面ですが，たとえば自己同型群が必ず有限になるとかチャーン数の間に宮岡不等式 $3c_2 \geq c_1^2$ が成り立つなどの有名な結果があります。$\kappa = -\infty$ の曲面は有理曲線（$\mathbb{P}^1$ の像）で覆われてしまいますが，$\kappa \geq 0$ ではそうはなりません。3 次元代数多様体論では森氏の有理曲線の存在についての研究から極小モデル理論が生まれ，この曲面の分類表にかなり近づいたものが得られています。