はじめに　— この小冊子の使い方について

この小冊子は 2014 年度 第 22 回整数論サマースクール『非可換岩澤理論』に於ける基本事項の確認及び「アフタースクール」の時間 (演習・自習の時間) に用いることを想定して編纂された問題集です。問題はその意図する目的に応じて以下の 3 段階に分けられております。

Hop!　代数的整数論の基本事項の確認問題。整数論に於ける全ての分野で半ば「常識」として用いられている事柄を集めたものです。また、サマースクール本番前に (主張の内容くらいは) 確認しておいて欲しい事項でもあります。

Step!!　若干進んだ (専門的な) 内容ではあるけれど、整数論の研究に於いてはしばしば「基礎知識」として断り無しに用いられることも多い事項に関する問題です。若干抽象的な内容が多いですが、この周辺の問題を抵抗なく解ける様になることは研究に於ける「武器」を増やす意味でも非常に重要です。また、サマースクール本番の講演内でも用いられる様な事柄が多数収録されています。

Jump!!!　今回のサマースクールではあまり時間をかけて扱えないけれど非常に重要な (古典的) 岩澤理論の基礎事項を、特に有理数体の可換拡大の場合を中心に問題形式にして纏めてみました。ベルヌーイ数に始まり、p 進 L 関数や円単数等、岩澤理論の「キーワード」とも言える諸概念を問題を通じて自然に学べる様に配慮した (つもりの) ものです。岩澤理論の教科書を勉強する際のチェックリストとしても用いることが出来るのではないかと期待しています。

「アフタースクール 予習 問題集」と銘打ってはおりますが、かなりの量の問題を収録しておりますので、その全てをサマースクール本番前に解いてくることは実質的に不可能だと思いますし、編集者もそのようなことは 全く想定も要求もしておりません。多岐に渡る分野からバラエティに富んだ問題を集めてきましたので、「取り敢えず Hop! 篇に関してだけ予習して、Step!! 篇に関しては実際に講演で登場したときにアフタースクールで解いてみて理解を深めよう」とか「僕は岩澤理論を将来勉強したいから、Jump!!! 篇の問題を見ながら、興味がある問題に対応するワシントンの本の部分を読んでいってみよう」など、**各自の興味、趣味、方針、展望に併せて有効活用** していただければと考えております。

この小冊子がサマースクールに参加された皆様の将来の研究及び勉強にとって何らかの糧となることを切に願っております。

■ **謝辞**　この予習問題集の作成に当たり多くの方からの助言を賜わりました。特に愛媛大学の大下達也さん、都留文科大学の岡野恵司さん、大阪大学の川島誠さん、大阪大学の佐久川憲児さんには問題作成の手伝いを含め多方面で大変お世話になりました。ここに御礼申し上げます。

また、Jump!!! 篇の問題の一部 (特に久保田-レオポルトの p 進 L 関数の構成の部分) では、原が 2012 年の八王子解析数論セミナーで行った講演の内容を参考とさせていただいたことを付記させていただきます。p 進 L 関数の様々な構成を総括して講演すると言う貴重な機会を与えて下さった若林功さんと上智大学の中筋麻貴さん、北里大学の宮崎直さんに改めて感謝致します。

Hop! — 先ずはウォーミング・アップから

(発展的な話題には $*$ マークを付けています)

■ 1. p 進数体の基礎事項　以下 p は素数であるとする。

問題 1-1. (体の付値)

体 K の **加法的付値** *additive valuation* (または 指数付値 exponential valuation), **乗法的付値** *multiplicative valuation* の定義を調べなさい。また、以下の用語の意味を調べなさい; アルキメデス的な乗法的付値、非アルキメデス的な乗法的付値、離散付値。

参考　[足立三宅 98, 2.1 章],[斎藤 97, 8.1 章], [森田 99, 5.1 章], [Neu92, Kapitel II, Definition (3.1)]

問題 1-2. (p 進付値)

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の (正規化された) 加法的付値

$$v_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

の定義を調べなさい。また、v_p が離散付値であること及び、付随する乗法的付値

$$|\ \cdot\ |_p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\ ;\ x \mapsto p^{-v_p(x)}$$

が非アルキメデス的付値であることを確認しなさい。

参考　[足立三宅 98, 例 2.1.3], [斎藤 97, 定義 (7.13), 例 (8.2)], [Neu92, Kapitel II, Sektion 2]

問題 1-3. (p 進完備化と逆極限)

有理数体 $\mathbb{Q}$ を乗法的付値 $|\cdot|_p$ によって完備化したものを $\mathbb{Q}_p$ と書き、p **進数体** *the p-adic number field* と呼ぶ。また、$|x|_p \leq 1$ を満たすような元 x からなる $\mathbb{Q}_p$ の部分集合 (即ち v_p または $|\cdot|_p$ に付随する **付値環** *valuation ring*) を $\mathbb{Z}_p$ と書き、p **進整数環** *the p-adic integer ring* と呼ぶ。

このとき、p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ が逆極限 $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ と同型であることを証明しなさい (逆極限は自然な全射 $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に関してとるものとする)。

参考　[斎藤 97, 定理 (7.4), 定理 (8.5)], [Neu92, Kapitel II, Satz (2.5)]

問題 1-4. (ヘンゼルの補題)

$\mathbb{Z}_p$-係数多項式 $f(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ に関する **ヘンゼルの補題** HENSEL*'s lemma* の主張を調べなさい。また、ヘンゼルの補題を用いて $F(X) = X^2 - 11$ が (*a*) $\mathbb{Z}_5[X]$, (*b*) $\mathbb{Z}_3[X]$, (*c*) $\mathbb{Z}_2[X]$ に於いて因数分解可能であるかどうかを調べなさい。

参考　[足立三宅 98, 定理 2.2.2], [斎藤 97, 定理 (8.11)], [森田 99, 定理 5.4], [Neu92, Kapitel II, Henselesches Lemma (4.6)]

問題 1-5. (p 進数体の乗法群の構造)

p 進整数体の乗法群 $\mathbb{Q}_p^\times$ を直積分解しなさい。[ヒント: ヘンゼルの補題と p 進対数関数]

参考 [足立三宅 98, 命題 2.6.5], [森田 99, 命題 (6.3)], [Neu92, Kapitel II, Satz (5.7)]

※ 一般の代数体 F 及びその素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、**$\mathfrak{p}$ 進付値での完備化** $F_{\mathfrak{p}}$ とその整数環 $\mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ を考えても、上記の設問と全く同様のことが成り立ちます。

■ 2. 代数体の基礎事項

有理数体 $\mathbb{Q}$ の (固定された代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の中での) 有限次拡大を **代数体** *number fields* と呼ぶ。

問題 2-1. (無限素点)

代数体 F の **無限素点** *infinite place* の定義を述べなさい。また、無限素点は **実素点** *real place* と **複素素点** *complex place* の 2 種類に分類される。そのそれぞれの定義を述べなさい。

参考 [数論 I, 定義 4.19],[森田 99, 6.3 章], [Neu92, Kapitel III, Definition (1.1)]

問題 2-2. (総実代数体)

無限素点が実素点のみであるような代数体を **総実代数体** *totally real number field* と呼ぶ。総実代数体の例を挙げなさい。

問題 2-3. (総虚代数体)

無限素点が複素素点のみであるような代数体を **総虚代数体** *totally imaginary number field* と呼ぶ。総虚代数体の例を挙げなさい。

問題 2-4. (CM 体)

総実代数体の総虚 2 次拡大、即ち総実代数体の 2 次拡大で総虚代数体となる様なものを ***CM* 体** *CM number field* と呼ぶ。CM 体の例を挙げなさい。

問題 2-5. 総実でも総虚でもない代数体の例を挙げなさい。

問題 2-6. CM 体ではない総虚代数体の例を挙げなさい。

※ 実際には、総実性や総虚性は $\mathbb{Q}$ 上の無限次元代数拡大に対しても定義される概念です。

■ 3. 無限次ガロワ理論

問題 3-1. ((無限次) ガロワ拡大)

(無限次) ガロワ拡大の定義を調べなさい。

参考 [藤崎 91, 3.1 節 および 付録], [森田 99, 付録 C]

問題 3-2. (クルル位相)

(無限次) ガロワ拡大 L/F のガロワ群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ に自然に入る**クルル位相** Krull *topology* とはどのような位相か調べなさい。

参考 [藤崎 91, 付録], [森田 99, 付録 C.2], [Neu92, Kapitel IV, Sektion 1]

問題 3-3. (無限次ガロワ理論の基本定理)

無限次ガロワ理論の基本定理の **正確な** 主張を述べなさい。

参考 [藤崎 91, 定理 A3], [森田 99, 付録 C.2], [Neu92, Kapitel IV, Sektion 1]

問題 3-4. 無限次ガロワ理論に於いては、ガロワ群の位相を込めて考えないとガロワ理論の基本定理に於ける 1 対 1 対応は一般には成り立たない。その様な反例を構成しなさい。 [ヒント: 有限体 $\mathbb{F}_p$ の代数的閉包を考えよう]

参考 [Neu92, Kapitel IV, Sektion 1]

■ 4. クンマー理論

この節では、F を 1 **の** n **乗根を全て含む** 代数体とする。

問題 4-1. $F^\times$ の元 a に対し、代数方程式 $X^n - a = 0$ の (固定された代数的閉包 $\overline{F}$ の中での) 根の一つを $\sqrt[n]{a}$ で表すこととする。

このとき、拡大 $F(\sqrt[n]{a})/F$ は拡大次数が n の約数となるような巡回拡大となることを証明しなさい。特に、ガロワ群 $\mathrm{Gal}(F(\sqrt[n]{a})/F)$ はどのような元で生成されるかを調べなさい。

参考 [桂 05, 定理 2.6.1 (1)]

問題 4-2. 逆に F の n 次巡回拡大 L/F が与えられたとき、ある $F^\times$ の元 a_L が存在して $L = F(\sqrt[n]{a_L})$ と表すことが出来ることを証明しなさい。 (ヒント: デデキントの補題 [桂 05, 系 2.4.5] を用いる)

参考 [桂 05, 定理 2.6.1 (2)]

問題 4-3. 集合としての標準的全単射

$$\{F^\times/(F^\times)^n \text{ の巡回部分群 }\} \xrightarrow{\sim} \{ \text{ 次数が } n \text{ の約数となる様な } F \text{ の巡回拡大 }\}$$

を具体的に構成しなさい。また、この全単射は自然な方法で

$$\{F^\times/(F^\times)^n \text{の有限部分群 }\} \xrightarrow{\sim} \{F \text{ の指数 } n \text{ の有限次クンマー拡大 }\}$$

に拡張出来ることを確認しなさい[*1]。

参考 [桂 05, 定理 3.4.8], [藤崎 91, 定理 3.83]

[*1] 有限次アーベル拡大 L/F が **指数** n **のクンマー拡大である** とは、ガロワ群 $\mathrm{Gal}(L/F)$ の冪指数 exponent が n であること、即ち $\mathrm{Gal}(L/F)$ の任意の元 σ に対して σ^n が自明となることとする。

■ 5. ヒルベルトの分岐理論

L/F を代数体の有限次ガロワ拡大とし[*2]、L, F の整数環をそれぞれ $\mathcal{O}_L$, $\mathcal{O}_F$ と表すこととする。$\mathfrak{p}$ を $\mathcal{O}_F$ の素イデアルとする。$\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_F = \mathfrak{p}$ を満たす $\mathcal{O}_L$ の素イデアル $\mathfrak{P}$ を一つ選ぶ (このような素イデアル $\mathfrak{P}$ を $\mathfrak{p}$ **の上にある** L **の素イデアル** と呼ぶ)。

問題 5-1. (分岐指数と相対次数)

分岐指数 *ramification index* $e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ 及び**相対次数** *relative degree* $f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ の定義を調べなさい。また、基本等式

$$\sum_{\mathfrak{P} \cap \mathcal{O}_F = \mathfrak{p}} e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} = [L : F]$$

を証明しなさい。

※ 分岐指数 $e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ が 1 より真に大きい素イデアル $\mathfrak{P}$ (または $\mathfrak{p}$) は、拡大 L/F に於いて **分岐している** *ramified in* L/F と言う。

参考 [足立三宅 98, 1.4 章, 定理 1.4.2], [森田 99, 4.6 章], [Neu92, Kapitel Ⅰ, Satz (8.2)], [Se68, Chapitre Ⅰ, Section 4 et Section 7]

問題 5-2. (分解群)

分解群 $D_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ の定義を調べなさい。また､分解群 $D_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ が自明となるとき (即ち $D_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}} = \{1\}$ となるとき) $\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ はどの様に分解されるかを答えなさい。

参考 [足立三宅 98, 1.5 章], [森田 99, 4.7 章], [Neu92, Kapitel Ⅰ, Definition (9.2) und Kapitel Ⅱ, Definition (9.2)], [Se68, Chaptre Ⅰ, Section 7]

問題 5-3. (惰性群)

惰性群 $I_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ の定義を調べなさい。また、惰性群 $I_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ が自明となるとき、$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L$ はどのように分解れるかを答えなさい。

参考 [足立三宅 98, 1.5 章], [森田 99, 4.7 章], [Neu92, Kapitel Ⅰ, Definition (9.5) und Kapitel Ⅱ, Definition (9.3)], [Se68, Chaptre Ⅰ, Section 7]

問題 5-4. (局所体の拡大との関係)

代数体 L, F の、$\mathfrak{P}$ 進付値及び $\mathfrak{p}$ 進付値に関する完備化をそれぞれ $L_{\mathfrak{P}}$, $F_{\mathfrak{p}}$ と表すとき、ガロワ群 $\mathrm{Gal}(L_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}})$ が分解群 $D_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ と同型となることを証明しなさい。

参考 [足立三宅 98, 2.9 章, 特に 定理 2.9.4], [Neu92, Kapitel Ⅱ, Satz (9.6)], [Se68, Chaptre Ⅱ, Théorème 1 et Corollaire 4]

[*2] L/F がガロワ拡大でなくてもヒルベルトの分岐理論は展開出来ますが、ここでは簡単のためガロワ性を仮定しました。

問題 5-5. ($\mathbb{Z}_p$-拡大と分岐素点)*

p を素数とする。代数体 F のガロワ拡大 F_∞ で、ガロワ群 $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が副有限群 $\mathbb{Z}_p$ と同型となるものを F の $\mathbb{Z}_p$-**拡大** $\mathbb{Z}_p$-*extension* と呼ぶ。

(i) 拡大 F_∞/F に於いて分岐する素イデアルは、p の上にある F の素イデアルのみであることを証明しなさい。

(ii) p の上にある F の素イデアルのうち少なくとも一つは拡大 F_∞/F に於いて分岐することを証明しなさい。

参考　[La90, Chapter 5, Section 4, Lemma], [Wa97, Proposition 13.2, Lemma 13.3]

■ 6. 類体論の基礎事項

問題 6-1. (大域類体論の相互写像)

大域類体論の相互写像とは何処から何処への写像で、どのような性質を持つものかを調べなさい。イデアル版とイデール版がありますが、どちらでも構いません (出来れば両方とも調べて、その関係も勉強してしまおう)。

参考　[足立三宅 98, 定理 3.3, 定理 4.6.7],[数論 I , 定理 8.4], [森田 99, 定理 11.4], [CaFr86, Chapter Ⅶ, Section 5], [Neu92, Kapitel Ⅵ, Sektion 5 (有限次拡大版)]

問題 6-2. (移送写像)

群 G の **位数有限** 部分群 H を考える。また、G^{ab} 及び H^{ab} で G 及び H のアーベル化を表すものとする。このとき、**移送写像** *die Verlagerung* $\mathrm{Ver}\colon G^{\mathrm{ab}} \to H^{\mathrm{ab}}$ の定義を調べなさい。特に H が G の正規部分群のときは、H の元 h に対して

$$\mathrm{Ver}(h) = \prod_{x \in G/H} \tilde{x}^{-1} h \tilde{x} \mod [H, H]$$

となることを確認しなさい (但し $\tilde{x}$ は x の G への任意の持ち上げとする)。

参考　[足立三宅 98, 命題 7.2.4], [Neu92, Kapitel Ⅳ, Sektion 5], [Se68, Chaptre Ⅶ, Section 8]

問題 6-3. (類体論の相互写像の関手性)

F'/F を代数体の有限次拡大とするとき、F に関する相互写像と F' に関する相互写像はどのように関係しているかを調べなさい (「逆方向」の 2 つの関手性があります)。

参考　[足立三宅 98, 命題 3.3.1, 命題 4.6.6], [Neu92, Kapitel Ⅵ, Sektion 5], ([Se68, Chapitre Ⅶ, Application])

問題 6-4. (不分岐類体論)

類体論の相互法則によって、代数体 F の最大 **不分岐** アーベル拡大 H_F は何に対応するか述べなさい。特に H_F の F 上の拡大次数が有限であることを確認しなさい。

参考　[数論 I , 第 8 章 (g)(ウ)] [Neu92, Kapitel Ⅵ, Satz (6.8) und Satz (6.9)]

問題 6-5. (ヒルベルト類体)

アーベル拡大 L/F で、条件

F の素イデアル $\mathfrak{p}$ が L で完全分解 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}$ は F の単項イデアル

を満たすものを 代数体 F のヒルベルト類体 *der Hilbertscher Klassenkörper* と呼ぶ。

代数体 F のヒルベルト類体が (一意に存在して) H_F と一致することを確認しなさい。

参考　[Neu92, Kapitel VI, Theorem (7.3) und Korollar (7.4)]

問題 6-6. n を任意の自然数とする。このとき、類数 h_F が n の倍数となる様な代数体 F が必ず存在することを証明しなさい。

問題 6-7. (Gaußの種の理論 Gaußian genus theory)*

以下の設問に答えなさい。

(i) 代数体 F の **狭義イデアル類群** *the strict ideal group / the narrow ideal group* の定義を調べなさい。

(ii) F を二次体 (有理数体の 2 次拡大体) とし、F の狭義イデアル類群を $\mathrm{Cl}^+(F)$ で表す。また、2 次拡大 $F/\mathbb{Q}$ で分岐する素点の総数を s で表すことにする。このとき、等式

$$\dim_{\mathbb{F}_2}(\mathrm{Cl}^+(F)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{F}_2) = s-1$$

が成り立つことを証明しなさい ($\mathbb{F}_2=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は 2 元体)。

問題 6-8. ($\mathbb{Z}_p$-拡大の合成体とレオポルト予想)*

代数体 F の複素素点の数を r_2 とし、p を任意の素数とする。$U_{F,p}=(\mathcal{O}_F\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)^\times$ とおく (**局所単数群** *local unit group* と呼ばれる)。包含写像 $\mathcal{O}_F^\times \hookrightarrow U_{F,p}$ が誘導する $\mathbb{Q}_p$ 線形写像

$$\mathcal{O}_{F,p}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_p \to U_{F,p}\otimes_{\mathbb{Z}_p}\mathbb{Q}_p$$

の核の次元を δ とおく。このとき、F の全ての $\mathbb{Z}_p$-拡大の合成体 $\widetilde{F}$ の F 上のガロワ群 $\mathrm{Gal}(\widetilde{F}/F)$ は、階数 $r_2+1+\delta$ の自由 $\mathbb{Z}_p$ 加群と同型になることを証明しなさい。

※ 値 $\delta=\delta_{F,p}$ は (代数体 F 及び素数 p に関する) **レオポルト欠損** Leopoldt *defect* と呼ばれており、全ての代数体 F 及び素数 p に対して $\delta_{F,p}=0$ となることが予想されています (これが有名な **レオポルト予想** Leopoldt's conjecture です)。レオポルト予想は p 進単数基準の非自明性等にも関わる整数論に於ける重要な予想の一つで、Brumer により「F が有理数体の有限次アーベル拡大のとき」及び「F が虚二次体の有限次アーベル拡大のとき」は証明されていますが、その後はあまり劇的な進展のない非常に困難な予想となっています。

参考　[Wa97, Theorem 13.4]

問題 6-9. (単項化定理 der Hauptidealsatz)*

代数体 F のヒルベルト類体に関する **単項化定理** の主張を調べなさい。余力があればその証明にもチャレンジしてみよう。 (ヒント: F のヒルベルト類体を H_1, H_1 のヒルベルト類体を H_2 として相互写像の関手性を考えよう)

参考　[足立三宅 98, 7.2 章], [Neu92, Kapitel VII, Theorem (7.5) und Theorem (7.6)]

■ 7. 非可換環論の基礎理論

問題 7-1. (ジェイコブソン根基)

R を単位的結合環とする。R の全ての左極大イデアルの共通部分を $\mathrm{Jac}(R)$ と書き、R の **ジェイコブソン根基** JACOBSON 根基 と呼ぶ。以下が成立することを証明しなさい。

(i) $\mathrm{Jac}(R)$ は R の全ての **右** 極大イデアルの共通部分と一致する[*3]。

(ii) $\mathrm{Jac}(R)$ は R の **左** 単純加群の零化イデアル達の共通部分と一致する。

(iii) $\mathrm{Jac}(R)$ は R の **右** 単純加群の零化イデアル達の共通部分と一致する。

(iv) $\mathrm{Jac}(R) = \{a \in R \mid 1 + RaR \subseteq R^{\times}\}$ が成立する。

参考 [CR81, Propositon (5.5), Theorem (5.10)]

問題 7-2. (中山の補題[*4])

単位的結合環 R 上の **有限生成** 左 (または 右) R-加群 M に対して，$\mathrm{Jac}(R)M = M$ (または $M\mathrm{Jac}(R) = M$) が成立するとき、$M = 0$ となることを証明しなさい。

参考 [CR81, Nakayama's Lemma (5.7)]

問題 7-3. R を $\mathrm{Jac}(R)$ 進完備な左ネーター環として、M を左 R-加群とする。このとき、$M/\mathrm{Jac}(R)M$ が有限生成 R 加群であることと M が有限生成 R 加群であることが同値であることを証明しなさい。[ヒント: 中山の補題 (の位相加群版) を用いる]

[*3] このことから、特にジェイコブソン根基は両側イデアルとなることが従います

[*4] 中山-東屋-クルルの補題 (略して NAK の補題)、または (特に非可換環の場合) ジェイコブソン-東屋の補題などとも呼ばれています。

Step!! — ここらでちょいとハードル・アップ

(発展的な話題には $*$ マークを付けています)

■ 8. 有限群の表現論から

本節では G は有限群とする。また、$\mathbb{Q}$ の (固定された代数的閉包の中での) 十分大きな代数拡大 L をとって、G の線形表現が全て L 上実現される (すなわち表現空間として有限次元 L-ベクトル空間が取れる) 様にとっておこう。

問題 8-1. (誘導表現)

G の部分群 H の線形表現 $\rho\colon H \to \mathrm{Aut}_L(W_\rho) \cong GL_d(L)$ が与えられているものとする。このとき、ρ の **誘導表現** *induced representation* $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ の定義を述べなさい。特に、誘導表現 $\mathrm{Ind}_H^G(\rho)$ は左 $L[G]$-加群として $L[G] \otimes_{L[H]} W_\rho$ と同一視することが出来ることを確認しなさい。

参考 [CR81, Section 10A], [Se67, Section 7.1]

問題 8-2. (フロベニウスの相互律)

H を G の部分群とするとき、誘導表現に関するフロベニウスの相互律の主張を述べなさい (余力があるならば証明にも挑戦してみよう)。

参考 [CR81, Theorem 10.8], [Se67, Section 7.3]

問題 8-3. (マッキーの既約性判定法とその応用)

H を G の有限群とし、W を H の線形表現とする。このとき、$\mathrm{Ind}_H^G(W)$ の既約性に関する **マッキーの判定法** *Mackey's irreducibility criterion* の主張を述べなさい。

また、マッキーの既約性判定法を用いて、有限アーベル群 A と有限群 H の半直積 $G = A \rtimes H$ の既約表現を全て決定しなさい。

参考 [Se67, Section 7.5, Proposition 16 et Section 9.2]

問題 8-4. (アルティンの誘導定理、ブラウアーの誘導定理)

有限群の表現論に於ける **アルティンの誘導定理** Artin*'s induction theorem* 及び **ブラウアーの誘導定理** Brauer*'s induction theorem* の主張を調べなさい。

参考 [CR81, Theorem (15.4) 及び Theorem (15.9)], [Se67, Section 8, Corollaire de Théorème 15 et Section 10, Théorème 22]

■ 9. ガロワコホモロジー

問題 9-1. (ガロワコホモロジーの定義)

ガロワコホモロジー (またはより一般の概念である群コホモロジー) の定義を述べなさい (導来関手としての定義、コチェイン複体を用いた明示的定義等がありますので、比較検討してみましょう)。

参考 [SS09, 佐藤周友さんの稿の第 2 節], [NSW00, Chapter Ⅰ, Definition (1.2.2)] [Se68, Chapitre Ⅶ, Section 2 et Section 3], [Se94, Chapitre Ⅱ, Section 1.1]

問題 9-2. (ガロワコホモロジーの長完全系列)

代数体 F の絶対ガロワ群が連続に作用する位相的アーベル群の短完全系列

$$(*):\ 0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

が、(ガロワ群の作用と整合的な) 連続切断 $\iota\colon M'' \to M$ を持つ (即ち ι は M, M'' の位相に関して連続で $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{M''}$ が成立するということ) とする。このとき、短完全系列 $(*)$ に付随するガロワコホモロジーの長完全系列とはどのようなものか述べなさい。

参考 [SS09, 佐藤周友さんの稿, 第 2.1 節 (1)], [NSW00, Chapter Ⅰ, Theorem (1.3.2)], [Se68, Chapitre Ⅶ, Section 2, p.119]

問題 9-3. (シャピロの補題)

誘導加群のコホモロジーについての **シャピロの補題** SHAPIRO*'s lemma* の主張を調べなさい。余力があれば証明にも挑戦しよう。

参考 [SS09, 佐藤周友さんの稿, 命題 2.3], [NSW00, Chapter Ⅰ, Proposition (1.6.3)], [Se94, Chapitre Ⅰ, Proposition 10], [Ru00, Proposition B.4.2]

問題 9-4. (ヒルベルトの定理 90)

体のガロワコホモロジーに関する **ヒルベルトの定理** 90 *der Hilbertscher Satz* 90 の主張を述べなさい (余力があれば証明にも挑戦しよう)。

参考 [SS09, 佐藤周友さんの稿, 命題 3.2 (2)], [NSW00, Chapter 6, Theorem (6.2.1)], [Se68, Chapitre Ⅹ, Propsition 2.]

問題 9-5. (クンマー理論との関係)

μ_n で ($\mathbb{Q}$ の固定された代数的閉包に於ける) 1 の n 乗根全体のなす乗法群とする。このとき、代数体 F に対し $H^1(F, \mu) \cong F^\times/(F^\times)^n$ が成立することを 問題 9-2. 及び 問題 9-4. を用いて証明しなさい。

特に F が 1 の n 乗根を全て含む場合には、問題 4-3. の (最初の図式の) 1-1 対応がこの同型から得られることを確認しなさい。

参考 [SS09, 佐藤周友さんの稿, 例 3.3], [NSW00, Chapter 6, Theorem (6.2.2)],[Se68, Chapitre Ⅹ, Section 3 (b)], [Se94, Chapitre Ⅱ, Proposition 1, Corollaire]

■ 10. **岩澤代数と岩澤代数上の加群**

以下 $\mathcal{O}$ は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の整数環とする (例えば $\mathbb{Z}_p$ など)。

問題 10-1. (完備群環)

G を副有限群とするとき、G の $\mathcal{O}$ 上の **完備群環** *completed group ring* (或いは **岩澤代数** IWASAWA *algebra*) の定義を調べなさい。

参考 [SS03, 伊藤剛司さんの稿, Section 1],[La90, Chapter 7, Section 7.1, p.114], [Wa97, Chapter 5, Section 1, p.125] (以上は $G = \Gamma \cong \mathbb{Z}_p$ の場合), [数論 II, 第 10 章, 10.1 節 (d)], [NSW00, Chapter V, Definition (5.2.1)]

問題 10-2. (セールの同型)

$\mathcal{O}$ 上の d 変数形式的冪級数環を $\mathcal{O}[[T_1, \ldots, T_d]]$ で表すこととする。Γ を $\mathbb{Z}_p^d$ と同型な位相群とし、その位相的生成元 $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ を一つ固定するとき[*5]

$$\mathcal{O}[[\Gamma]] \to \mathcal{O}[[T_1, \ldots, T_d]] \ ; \ \gamma_1 \mapsto 1 + T_1, \ldots, \gamma_d \mapsto 1 + T_d$$

は同型写像となることを証明しなさい。特に完備群環 $\mathcal{O}[[\Gamma]]$ は完備な局所ネーター整域となる[*6]ことを確認しなさい。

参考 [数論 II, 命題 10.10], [SS03, 伊藤剛司さんの稿, 定理 1.3], [La90, Chapter 7, Theorem 7.1], [Wa97, Chapter 5, Theorem 1.1] (以上は $d = 1$ の場合), [SS03, 伊藤剛司さんの稿, 命題 5.1] (多変数版の主張; 証明は 1 変数版と同様)

※ この同型は、Γ の位相的生成元を固定する毎に定まる非標準的な同型写像です。また、より一般に (可換とは限らない) コンパクト p 進リー群 G に対して、岩澤代数 $\mathcal{O}[[G]]$ は左右ネーター環になることが知られています ([DdSMS91, Corollary 7.25], [Laz65, Chapitre V, Proposition (2.2.4)] 参照)。

問題 10-3. (p 進ワイエルシュトラス準備定理)

$\mathcal{O}$ 係数の 1 変数多項式 $f(T) \in \mathcal{O}[T]$ が **特殊多項式**[*7] *distinguished polynomial* であることの定義を調べなさい。

また、$\mathcal{O}[[T]]$ の元の構造に関する p **進ワイエルシュトラスの準備定理** *p-adic* WEIERSTRASS' *preparation theorem* の主張を調べ、可能ならばその証明を与えなさい。

参考 [数論 II, 命題 10.19], [SS03, 伊藤剛司さんの稿, Section 1], [La90, Chapter 7, Theorem 2.2], [Ko84, Chapter IV, Theorem 14], [Wa97, Chapter 7, Theorem 7.3]

[*5] Γ の中で $\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ が生成するアーベル部分群の位相的閉包が Γ と一致するとき、$\gamma_1, \ldots, \gamma_d$ を Γ の **位相的生成元** *topological generators* と呼びます。

[*6] より強く、$\mathcal{O}[[\Gamma]]$ は **完備な正則局所環** (したがって一意分解整域) となることが可換環論の基本事項より従います。

[*7] 多変数複素解析学に於ける distinguished pseudopolynomial の p 進類似。岩波数学辞典ではこちらを「特殊擬多項式」と訳していたので、ここでも「特殊多項式」と訳しましたが、適切な訳語かと言われると疑問の余地が残ります。実際、研究者の間でも、この用語に限っては訳さずにそのまま distinguished polynomial と呼んだり、「distinguished 多項式」等と呼ぶことの方が圧倒的に多いように思います。

問題 10-4. (擬零加群と擬同型写像)

$\mathcal{R}$ を可換なネーター整閉整域とする (例えば $\mathcal{O}[[T_1,\ldots,T_d]]$ など)。有限生成 $\mathcal{R}$-加群 M が **擬零加群** *pseudonull module* であることの定義を調べなさい。また、$\mathcal{R}$-写像の準同型写像 $f\colon M\to N$ が **擬同型** *pseudoisomorphism*[*8] であることの定義を調べなさい。

参考 [数論II, 第 10 章, 10.2 節 (b)], [SS03, 伊藤剛司さんの稿, 2.3 節, 定義], [La90, Chapter 5, Section 3, p.131], [Wa97, Section 13.2, Definition] (以上 $\mathcal{R}\cong\mathbb{Z}_p[[T]]$ の時の擬同型の定義), [SS03, 伊藤剛司さんの稿, 5 節, 定義] [Bou65, Chapitre 7, Section 4, Définition 2 et Définition 3], [NSW00, Chapter V, Definition (5.1.4) and Definition (5.1.5)]

※ $\mathcal{R}$-加群 M, N に対して擬同型写像 $f\colon M\to N$ が存在するとき、M と N は **擬同型** *pseudoisomorphic* であるといい、$M\sim N$ と書く。

問題 10-5. (擬同型と対称律)

$\mathcal{R}$ を可換なネーター整閉整域とする。擬同型 $\sim$ は有限生成 $\mathcal{R}$-加群のなす集合に関係を定めるが、一般に対称律を満たさないため同値関係とはならない。

擬同型が対称律を満たさない例を構成しなさい。また、擬同型は有限生成 **振れ** $\mathcal{R}$-加群のなす集合に於いては同値関係を定めることを確認しなさい。

(ヒント: $\Lambda=\mathbb{Z}_p[[T]]$ の極大イデアルの Λ への自然な埋め込みを考えよう)

参考 (擬同型写像が一般には同値関係とならないこと) [SS03, 伊藤剛司さんの稿, 2.3 節, 注意], [Wa97, Section 13.2, Warning]

(擬同型写像が有限生成 **振れ** R-加群間の同値関係となること) [NSW00, Proposition (5.1.7) 及びその直後の Remark 1.]

問題 10-6. (有限生成 $\Lambda_{\mathcal{O}}$-加群の構造定理)

$\Lambda_{\mathcal{O}}=\mathcal{O}[[T]]$ を $\mathcal{O}$ 上の 1 変数形式的冪級数環とするとき、有限生成 $\Lambda_{\mathcal{O}}$-加群の構造定理の **正確な** 主張を調べなさい。また、有限生成 **振れ** $\Lambda_{\mathcal{O}}$-加群の **特性イデアル** *characteristic ideal* の定義を述べなさい。

参考 [数論II, 第 10 章, 命題 (10.20)], [SS03, 伊藤剛司さんの稿, 2.3 節 及び定理 5.3], [La90, Chapter 5, Theorem 3.1], [Wa97, Chapter 13, Theorem 13.12]

※ より一般に、可換なネーター整閉整域 $\mathcal{R}$ 上の有限生成加群に対しても同様の構造定理が成り立ちます。詳細は [Bou65, Chapitre 7, Section 4, Théorème 4 et Théorème 5] 及び [NSW00, Theorem (5.1.10)] を参照。

※ 本節の内容は、藤井俊さんの講演 (+ プレスクール) の中でも簡単に触れられる予定です。

■ 11. p 進解析入門

有理数体 $\mathbb{Q}_p$ の (固定された) 代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ に、(乗法的) p 進付値 $|\cdot|_p$ を $|p|_p=\dfrac{1}{p}$ を満たす

*8 [La90] では *quasi isomorphism* の用語を用いていますが、こちらは複体の射にも用いられる用語なので (況してや非可換岩澤理論では複体の射の意味での quasi isomorphism も頻繁に登場するので) 非常に宜しくない用語の混用になっています。注意しましょう。

様に定める。このとき、$|\cdot|_p$ による $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の完備化を $\mathbb{C}_p$ と書くことにする ($\mathbb{C}_p$ は完備な代数的閉体となる)。

$\mathcal{K}$ を $\mathbb{C}_p$ の (完備な) 部分体とし、有限次 $\mathcal{K}$-ベクトル空間 $\mathcal{K}^r$ の元 $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_r)$ には $\|x\| = \max_{1\leq j\leq r} |x_j|_p$ でノルムを入れることとする。

問題 11-1. (収束冪級数関数の「解析性」)

$f(X_1, \ldots, X_r)$ を $\mathcal{K}^r$ 内の中心 $\underline{0}$, 半径 ρ の閉球 $B_\rho(\underline{0}) = \{\underline{x} \in \mathcal{K}^r \mid \|x\| \leq \rho\}$ で収束する $\mathcal{K}$ 係数冪級数とする。このとき任意の $\underline{a} \in B_\rho(\underline{0})$ に対して、$\mathcal{K}$-係数冪級数 $g_{\underline{a}}(X_1, \ldots, X_r)$ で等式 $f(\underline{x}) = g_{\underline{a}}(\underline{x} - \underline{a})$ が任意の $\underline{x} \in B_\rho(\underline{0}) = B_\rho(\underline{a})$ に対して成り立つ様なものが存在することを示しなさい。

※ 閉球上で定義された冪級数関数が「解析的」、つまり閉球上の任意の点で冪級数展開可能であることを確かめる問題。

参考 [DdSMS91, Lemma 8.3], [Schnei11, Corollary 5.5]

問題 11-2. (冪級数関数の (p 進) 一致の定理 identity theorem)

閉球 $B_\rho(0)$ 上で収束する $\mathcal{K}$ 係数 1 変数冪級数 $f(X)$ 及び $g(X)$ を考える。このとき、以下の主張 (冪級数関数の一致の定理) を証明しなさい。また、この主張を複素解析に於ける一致の定理の主張と比較しなさい。

> 0 に収束する $B_\rho(0)$ 内の点列 $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ (但し、各 j について $\xi_j \neq 0$ とする) に対し、$f(\xi_j) = g(\xi_j)$ が任意の自然数 j について成り立つならば、$\mathcal{K}$ 係数冪級数として $f(X)$ は $g(X)$ と一致する。

参考 [Iw72, Section 3, Lemma 1], ([Schnei11, Corollary 5.8])

問題 11-3. (局所 $\mathcal{K}$-解析的関数の定義)

$V = (V, \|\cdot\|)$ を $\mathcal{K}$ 上のバナッハ空間とする[*9]。$\mathcal{K}$-ベクトル空間 $\mathcal{K}^r$ の (空でない) 開部分空間 U 上定義されたバナッハ空間値関数 $f\colon U \to V$ が **局所 $\mathcal{K}$-解析的** *locally $\mathcal{K}$-analytic* であることの定義を述べなさい。

参考 [DdSMS91, Definition 8.2] ($\mathcal{K} = \mathbb{Q}_p$ かつ特別な場合), [Ko84, Chapter IV, p.88], [Se92, Chapter 2, p.p.69–70], [Schnei11, Section 6]

問題 11-4. (冪級数関数・局所解析的関数の例)

p 進指数関数、p 進対数関数、森田康夫の p 進ガンマ関数、アルティン- ハッセの指数関数の定義を調べなさい。

これ等の関数は (少なくとも最初の段階では) 冪級数に依って定義されるが、それぞれの冪級数の収束半径を求めなさい (或いは調べなさい)。

参考 [Ko84, Chapter IV, Sections 1 and 2]

[*9] 以下では $V = \mathcal{K}^s, \mathbb{C}_p$ のときしか考察しないので、その場合に解答すれば良い。

■ 12. p **群**

以下では、(副) p 群 G に対して $\mho_k(G)$ で G の元の p^k 乗達が生成する G の部分群 (即ち $\mho_k(G) = \langle g^{p^k} \mid g \in G \rangle$) を表すものとする。

問題 12-1. 有限 p 群 G の中心 $Z(G)$ は非自明であること (即ち単位元以外の元を含むこと) を証明しなさい。 [ヒント: 類等式を考えなさい]

参考 [Se68, Chapitre IX, Theorem 1]

問題 12-2. 有限 p 群 G の真部分群 H を考えるとき、G に於ける H の正規化群 $N_G H$ が必ず H を真に含むことを証明しなさい。 [ヒント: H を $N_G H = H$ となる部分群のうち位数最小のものとして、問題 12-1. の結果を利用して背理法により示す]

問題 12-3. 任意の有限 p 群は冪零群となること、即ち G の正規部分群の列

$$\{1\} = G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G_n = G$$

で、$1 \leq i \leq n$ を満たす自然数に対して G_i/G_{i-1} が G/G_{i-1} の中心に含まれるものが存在することを証明しなさい。 [ヒント: 問題 12-1. の結果を用いて具体的に $\{G_i\}_{i=1}^n$ を構成する]

問題 12-4.* 有限 p 群 G のフラッティーニ部分群 (Frattini subgroup, G の真極大部分群の共通部分) $\Phi(G)$ は $\mho_1(G)[G,G]$ で与えられることを示しなさい。

参考 [DdSMS91, Proposition 1.13]

問題 12-5. (多冪的 p 群)*

有限 p 群 G が **多冪的** *powerful* であることの定義を調べなさい。また、多冪的有限 p 群 G に対し、(*a*) $\Phi(G) = \mho_1(G)$, 及び (*b*) $\mho_k(G) = \{g^{p^k} \mid g \in G\}$ が成り立つことを示しなさい。

参考 [DdSMS91, Definition 2.1, Lemma 2.4, Theorem 2.7]

※ 副 p 群に対しても多冪的副 p 群が (適当に位相的閉包をとる等の修正の下で) 全く同様にして定義され、多冪的有限 p 群と同様の性質を満たすことが知られています。

■ 13.* p **進リー群**

問題 13-1. (局所解析的多様体の定義)

局所 ($\mathbb{Q}_p$-) 解析的多様体の定義を調べなさい。また、通常の (位相/可微分/複素) 多様体の定義と比較しなさい。

参考 [DdSMS91, Definition 8.8], [Se92, Chapter III, Section 2], [Schnei11, Section 8, p.47]

問題 13-2. (p 進リー群の定義)

p **進リー群** *p-adic Lie group* (または **局所** ($\mathbb{Q}_p$-) **解析的群** *locally* $\mathbb{Q}_p$*-analytic group*) の定義を調べ、通常の (実解析的または複素) リー群の定義と比較しなさい。

参考 [DdSMS91, Definition 8.14], [Laz65, Chapitre III, (3.1.1), (3.1.2) et (3.2.2)], [Se92, Chapter IV, Section 1], [Schnei11, Section 13, p.89]

問題 13-3. (一様多冪的副 p 群)

副 p 群が **一様多冪的** *uniformly powerful* であることの定義を調べなさい。また、**有限生成**多冪的副 p 群が一様多冪的となるための必要十分条件を調べなさい。

参考 [DdSMS91, Chapter 4, 特に Section 4.1]

問題 13-4. (抽象群の p-付値)

群 G 上の p-**付値** *p-valuation* の定義を調べなさい。また、その性質を述べなさい。

参考 [Laz65, Chapitre III, Definition (2.1.2)] (Chapitre II の Definition (1.1.1) も参照), [Schnei11, Chapter V, 特に Section 23]

問題 13-5. (ラザールの定理 Lazard's theorem)

位相群 G が p 進リー群となるための必要十分条件を記述するラザールの定理の正確な主張を調べなさい。また、位相群 G が **コンパクト** p 進リー群となるための必要十分条件はどうなるか考察しなさい。

参考 [DdSMS91, Theorem 8.32], [Laz65, Chapitre III, Proposition (3.1.3) et Théorème (3.1.7)] ([DdSMS91] での多冪的 p 群を用いた理論との関係を知りたい人は Chapitre III, Théorème (3.4.3) 及び (3.4.4) も参照), [Schnei11, Theorem 27.1, Theorem 29.8]

問題 13-6. ラザールの定理を用いて以下の主張を証明しなさい。

位相群 G が ($\mathbb{Q}_p$ 上の) p 進リー群の構造を持つための必要十分条件は、G が有限生成多冪的副 p 群 H を開部分群として持つことである。

参考 [DdSMS91, Theorem 8.1], ([Se92, Chapter V, p.157])

※ 分離的な位相群 G の (正規) 閉部分群 N に対し、N 及び G/N が p 進リー群の構造を持つなら G も (唯一の) p 進リー群の構造を持つことが知られています (セールの定理、[Laz65, Théorème (3.4.5)])。これを用いても証明出来ます。

問題 13-7. (p 進リー群の例)

問題 13-5. を用いて、位相群 (a) $\mathbb{Z}_p^d$ (但し $d \geq 1$); (b) $\mathbb{F}_p \rtimes \mathbb{Z}_p$ (但し $\mathbb{Z}_p$ の元 g は $\mathbb{F}_p$ の元 x に $g * x = x + g \mod p$ で作用する); (c) $GL_d(\mathbb{Z}_p)$ (但し $d \geq 1$) が (コンパクト) p 進リー群であることを証明しなさい。 [(c) のヒント: 自然な写像 $GL_d(\mathbb{Z}_p) \to GL_d(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ($p = 2$ の場合は $GL_d(\mathbb{Z}_p) \to GL_d(\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$) の核が一様多冪的となること [DdSMS91, Theorem 5.2] を用いる]

※ $GL_d(\mathbb{Z}_p)$ に関しては解析的な定義から直接 p 進リー群であることを確認することも出来ます (し、むしろそちらの方が簡単かも)。詳細は [Se92, Chapter IV, Section 2-1)] を参照。

問題 13-8. (部分 p 進リー群、商 p 進リー群)

p 進リー群の閉部分群は p 進リー群となることを証明しなさい (“p 進カルタンの定理”)。また、p 進リー群の閉部分群による商も p 進リー群となることを証明しなさい。

参考 [DdSMS91, Theorem 9.6], [Se92, Chapter V, Section 9, Theorem 1]

※ 問題 13-7. (c) 及び 問題 13-8. により、ガロワ表現 $\rho\colon G_F \to GL_d(\mathcal{O})$ の核に対応する体拡大 $\tilde{F}/F$ に対して $\mathrm{Gal}(\tilde{F}/F)$ が p 進リー群となることが従います。

コラム **p 進リー群の代数的取扱いについて** p 進リー群についての現代的な教科書としてここでは [DdSMS91] と [Schnei11] を挙げています。どちらもラザールの仕事 [Laz65] (及びセール [Se92] やブルバキの教科書) を下敷きにしていますが、[Schnei11] の方がより [Laz65] に忠実で、**群の p-付値**に基づいて議論を展開しています。一方 [DdSMS91] はより (抽象) 群論的な立場から p 進リー群を取り扱っており、p-付値の代わりに **一様多冪的副 p-群** と言う群論的な対象を中心に議論を展開しています ([LM87a, LM87b] の影響が強く反映されているものと思われます)[*10]。これ等の概念の直接的な関係としては

一様多冪的副 p 群 $\Rightarrow$ p-付値付き副 p 群 $\Rightarrow$ p 捩れ元を持たない副 p 群

が成り立ちます。興味がある方は [DdSMS91] の議論と [Schnei11] の議論を比較してみるのも面白いかもしれません (勿論ラザールの原論文 [Laz65] に挑戦するのも非常に良い勉強になると思います)。

■ 14. 古典的な代数的 K 理論

この節では R は (乗法に関する) 単位元を持つ結合的環とする。

問題 14-1. (低次 K 群の定義)

古典的な低次 K 群 $K_0(R)$, $K_1(R)$ の定義を調べなさい。

参考 [Bass68, Chapter IX, Section 1], [CR81, Section 16B], [CR87, Section 38A], [Mi71, Section 1 and Section 3], [Sw68, Part II, Chapter 1 and Chapter 13]

[*10] このような立場の違いは、[Schnei11, Introduction] で明確に宣言されています。

問題 14-2. (グロタンディーク群の同値関係)

R を単位的結合環とし、P, Q を射影的な有限生成左-R 加群とする。このとき、P と Q の類が $K_0(R)$ の元として一致する (即ち $K_0(R)$ に於いて $[P]=[Q]$ となる) ことは、ある非負整数 r に対して左 R-加群としての同型

$$P \oplus R^r \xrightarrow{\sim} Q \oplus R^r$$

が成り立つことと同値であることを確認しなさい。

参考 [Bass68, Chapter VII, Proposition (1.3)] [Sw68, Part II, Theorem 1.10] ([Sw68] では何故か「アーベル圏」の仮定がついていますが、証明の方針は全く同様です)

問題 14-3. (低次 G 群との比較)

古典的な低次 G 群 $G_0(R), G_1(R)$ の定義を調べなさい。また、自然な写像 $K_i(R) \to G_i(R)$ は R がどのような環の場合には同型になるか述べなさい。

参考 [Bass68, Chapter IX, Section 2], [CR87, Corollary (38.51)], [Sw68, Part II, Chapter 3, Chapter 4 and Chapter 16]

問題 14-4. R が単項イデアル整域であるとき $G_0(R)$ ($\cong K_0(R)$) は $\mathbb{Z}$ と標準的に同型である。この標準同型を具体的に書き下しなさい。可能ならば同型となっていることも証明しなさい。

参考 [Sw68, Part II, Proposition 1.5]

問題 14-5. (相対グロタンディーク群の例)

R を単位的結合環、S を R-代数とするとき、相対グロタンディーク群 $K_0(R,S)$ の定義を調べなさい。また、以下の事項を確認しなさい。

(i) $K_0(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ は有限生成捩れアーベル群のなす完全圏 $\mathscr{Ab}^{\mathrm{tors}}$ のグロタンディーク群 $K_0(\mathscr{Ab}^{\mathrm{tors}})$ と自然に同型となる。

(ii) 同型

$$K_0(\mathbb{Z},\mathbb{Q}) \cong K_0(\mathscr{Ab}^{\mathrm{tors}}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p:\text{素数}} \mathbb{Z}\ ;\ [A] \to \left(\mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p}(A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)\right)_p$$

が成り立つ。但し A は有限生成捩れアーベル群であり、有限生成捩れ $\mathbb{Z}_p$-加群 M の長さを $\mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ であらわすこととする。

参考 (相対グロタンディーク群の定義) [Sw68, Part II, Chapter 15 の p.p. 214–215 Definitions]

(i) は定義に基づいて計算してみれば簡単に分かるのでチャレンジしてみよう。

(ii) は [Sw68, Part II, Proposition (1.6)]

問題 14-6. (K 群とテンソル積)

n を 2 以上の整数として、アーベル群 $A_1 = \mathbb{Z}/n^2\mathbb{Z}$, $A_2 = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\oplus 2}$ を考えるとき、以下の設問に答えなさい。

(i) $K_0(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ に於いて $[A_1] = [A_2]$ であるが

$$[A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] \neq [A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$$

となることを確認しなさい。

(ii) $K_0(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ に対して

$$[A_1 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] - [\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_1, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})] = [A_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}] - [\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})] = 0$$

が成立することを確認しなさい。[ヒント: A_1, A_2 の射影分解を構成して、具体的に $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_i, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を計算してみよう]

※ 本設問は、グロタンディーク群の元としては「加群としてのテンソル積」は **平坦でない** 加群に対しては良い振る舞いをしないが、「射影分解をとった複体に対するテンソル積」(即ち **導来テンソル積** *derived tensor product*) は良い振る舞いをするという現象の一例となっています。

問題 14-7. R が可換な半局所環であるとき $K_1(R)$ は R の単数群 $R^\times$ と同型である。この標準同型を具体的に書き下しなさい。可能ならば同型となっていることも証明しなさい。

参考 [Bass68, Chapter IV, Corollary (9.2)], [CR87, Proposition (45.12)], [Sw68, Part II, p.199, Remark]

問題 14-8. (K 群の完全系列)

(a) I を R の両側イデアルとするとき、$K_1(R, I)$ の定義及び付随する完全系列がどのようなものかを調べなさい。

参考 [Bass68, Chaoter IX, Theorem (1.2)], [CR87, Remark (40.19) and Section 44],[Mi71, Section 4], [Sw68, Part II, p.214 Definitions and Theorem 15.5]

(b) S を R の (左右) オーレ集合とし、S による R の局所化を R_S で表す。このとき、$K_1(R, S)$ の定義及び付随する局所化完全系列がどのような完全系列か調べなさい。

参考 [Bass68, Chapter IX, Theorem (6.3)], [CR87, Localization Sequence (40.9)], ([Sw68, Part II, p.214 Definitions and Theorem 15.5])

※ 局所化完全系列に関しては、齋藤翔さんの講演に於いて詳しく扱われる予定です。なお、低次 K-群に関する局所化完全系列は [Bass68] では分母集合が中心的な場合に証明していますが、一般のオーレ集合に対しては Berrick と Keating が同様の (直接完全性を証明する) 手法で証明をしています。高次 K 群まで含めた局所化完全系列は Weibel-Yao によるものがありますが、齋藤翔さんの講演ではもっと一般の枠組みに拡張された形での局所化完全系列が紹介される予定です。お楽しみに!!!

問題 14-9. (中山の補題の応用)*

R を $\mathrm{Jac}(R)$ 進完備な左ネーター環とし、I を $\mathrm{Jac}(R)$ に含まれるような R の両側イデアルとする。このとき、自然な写像 $K_0(R) \to K_0(R/I)$ は単射であることを以下の手順に従って証明しなさい。

(i) P, Q を射影的な有限生成左 R-加群とする。$K_0(R/I)$ の元として $[P/IP]$ が $[Q/IQ]$ と一致すると仮定しよう。このとき、問題 14-2. より或る非負整数 r に対して左 R/I-加群としての同型 $P/IP \oplus (R/I)^r \xrightarrow{\sim} Q/IQ \oplus (R/I)^r$ が存在する。この同型写像が左 R-加群の準同型 $f\colon P \oplus R^r \to Q \oplus R^r$ に持ち上がることを証明しなさい。

(ii) $(\mathrm{Ker}\, f) \otimes_R R/I$ 及び $(\mathrm{Coker}\, f) \otimes_R R/I$ がともに 0 となることを証明しなさい。

(iii) (ii) の結果と中山の補題 (演習問題 7-2.) を用いて f が同型であることを証明しなさい。

(iii) の結果から、再び 問題 14-2. の結果を用いると $K_0(R)$ の元として $[P] = [Q]$ となることが従います。

参考 [CFKSV05, Lemma 3.5.]

※ この設問の事実は森澤貴之さんの講演中に、$\partial\colon K_1(\Lambda(G)_S) \to K_0(\Lambda(G), \Lambda(G)_S)$ の全射性の証明中で用いられる予定です。

■ 15. 射影極限の基礎事項

問題 15-1. (ミッターク-レフラー条件)

アーベル群の射影系 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **ミッターク-レフラー条件を満たす** $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *satisfies the* MITTAG-LEFFLER *condition* とはどのようなことかを調べなさい。

参考 [Ha97, Section 2.9]

問題 15-2. (ミッターク-レフラー条件を満たすための十分条件)

アーベル群の射影系 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は、以下の何れかの条件を満たすときミッターク-レフラー条件を満たすことを確認しなさい。

(a) 射影系の構造射 $A_{n+1} \to A_n$ が全て全射のとき。

(b) 射影系に属するアーベル群 A_n が全て有限アーベル群のとき。

(c) 射影系に属するアーベル群 A_n が全て体 k 上の有限次元ベクトル空間で、構造射 $A_{n+1} \to A_n$ が全て k-線形写像であるとき。

問題 15-3. (逆極限の [左] 完全性とミッターク-レフラー条件)

アーベル群の射影系の短完全系列[*11]

$$(*) \qquad 0 \longrightarrow \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow \{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

に対して、

$$0 \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_n \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} B_n \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

はアーベル群の完全系列となること (即ち $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}}$ が左完全関手となること) を証明しなさい。また、射影系 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がミッターク-レフラー条件を満たすならば

$$(*)_\infty \qquad 0 \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A_n \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} B_n \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} C_n \longrightarrow 0$$

も完全となることを証明しなさい。

参考 [Ha97, Chapter II, Proposition 9.1]. より一般の設定では EGA (Eléments de Géométrie Algébrique) の Chapitre 0_{III}, Proposition (13.2.2) も参照.

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が全射系の場合の証明は [AM69, Proposition 10.2] がホモロジー代数的で分かりやすいと思います。

問題 15-4. (逆極限で完全性が保存されない例)

完全列 $(*)$ に対して、その射影極限をとったもの $(*)_\infty$ が完全とならない例を述べなさい。[ヒント: $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ を考えなさい]

※ 本節の内容は、特に村上和明さんの講演内で何度も扱われる予定です。

[*11] つまり、全ての n について $0 \to A_n \to B_n \to C_n \to 0$ が完全であるということ。

Jump!!! — 古典的岩澤理論の関連問題にチャレンジ!!!

■ 16. ベルヌーイ数

問題 16-1. ((関-) ベルヌーイ数 (SEKI-)BERNOULLI numbers)

(関-) ベルヌーイ数 B_n (但し $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の母関数を用いた定義を述べなさい[*12]。特に、n が 3 以上の奇数のときに $B_n = 0$ となることを証明しなさい。

参考 [SS03, 木村巌さんの稿, 第 3.2 節 定義 3.8], [数論 I , 第 3 章, 定義 3.16], [La90, Chapter 2, Section 2, (B1)], [Wa97, Chapter 4, p.31]

問題 16-2. (一般化ベルヌーイ数 generalised BERNOULLI numbers)

$\chi\colon (\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^\times \to \mathbb{C}^\times$ を法 f のディリクレ指標とするとき、一般化ベルヌーイ数 $B_{\chi,n}$ (但し $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の母関数を用いた定義を述べなさい。特に $(\chi, n) = (\mathbb{1}, 1)$ の場合を除き、$\chi(-1) = (-1)^n$ を満たさない組 (χ, n) に対しては $B_{\chi,n} = 0$ となることを証明しなさい。

参考 [SS03, 木村巌さんの稿, 第 3.2 節 定義 3.10, 補題 3.15 及び 水澤靖さんの稿, 第 1 節, (1.2)], [La90, Chapter 2, Section 2, (B6)], [Wa97, Chapter 4, p.p.31–32]

問題 16-3. (ベルヌーイ多項式)

ベルヌーイ多項式 $B_n(X)$ (但し $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) の母関数を用いた定義を述べなさい。特に、$(a)$ $B_n(0) = B_n$ となること、並びに (b) 多項式としての等式

$$B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k X^{n-k}$$

が成り立つことを証明しなさい。ここで $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ は二項係数を表すものとする。

[ヒント: 母関数の形の比較、$\displaystyle e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!}$]

参考 [数論 I , 第 3 章, 定義 3.17], [SS03, 木村巌さんの稿, 第 3.2 節 定義 3.11, 補題 3.12], [La90, Chapter 2, Section 2, (B1)], [Wa97, Chapter 4, p.p.31–32]

[*12] ここでは $B_1 = -\dfrac{1}{2}$ となるものの方を想定しています。

問題 16-4. 任意の自然数 n に対して、ベルヌーイ多項式が関係式

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_{n-k}(X)}{k+1} = X^n$$

を満たすことを証明しなさい。このことを用いて、ベルヌーイ数が漸化式

$$(\star): \qquad B_0 = 1, \quad B_n = -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_{n-k}}{k+1} \quad (n \geq 1)$$

を満たすことを証明しなさい。

[ヒント: ベルヌーイ多項式の母関数による定義式に $e^t - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ を掛けてみよう]

※ 漸化式 $(\star)$ より、ベルヌーイ数が全て有理数であることが容易に分かります。

問題 16-5. 法 f のディリクレ指標 χ に対し、等式

$$B_{n,\chi} = f^{n-1} \sum_{a=0}^{f-1} \chi(a) B_n\left(\frac{a}{f}\right)$$

が成立することを証明しなさい。

参考 [SS03, 木村巌さんの稿, 第 3.2 節 命題 3.14], [La90, Chapter 2, Section 2, (B7)], [Wa97, Chapter 4, Proposition 4.1]

■ 17. (フレヴィッツの) ゼータ関数の解析接続と特殊値

※ 問題 17-3, 17-4 に関しては、いきなりフレヴィッツのゼータ関数を考えるのは難しいと感じたら先ずは **リーマンゼータ関数** $\zeta(s)$ (つまり “$x = 0$” の場合) の場合を考察してみよう。

問題 17-1. (メラン変換)

複素数値関数 $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ が (ルベーグ積分の意味で) 局所可積分で、実数 α, β に対して $f(t) = O(t^\alpha)$, $x \to +0$ 及び $f(t) = O(t^\beta)$, $x \to +\infty$ が成り立っているとする。このとき、$-\alpha < \mathrm{Re}(s) < -\beta$ を満たす複素数 s に対し、積分

$$\mathcal{M}(f)(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt$$

は収束し、領域 $\{s \in \mathbb{C} \mid -\alpha < \mathrm{Re}(s) < -\beta\}$ 上の複素解析的関数を定めることを証明しなさい。$\mathcal{M}(f)$ は関数 f の **メラン変換** Mellin *transform* と呼ばれています。

参考 [Neu92, Kapitel VII, Sektion 1, Theorem (1.4)] (ちょっと変則的)

メラン変換の一般論に関しては、例えば標準的なリーマンゼータ関数の教科書 (Titchmarsh, *The theory of Riemann Zeta Function* 等) を参照のこと。杉浦光夫著『解析入門 II』の第 IX 章 § 9 [5] にも若干の解説あり。

ただ、この問題自体は簡単な微分積分学の演習問題に過ぎません。

問題 17-2. (メラン変換の例)

以下の関数 $f(t)$ のメラン変換 $\mathcal{M}(f)$ は何になるかを述べなさい。

(i) $f(t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \geq a \end{cases}$ (但し a は正の実数)

(ii) $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$

(iii) $f(t) = e^{-t}$

※ (i) と (ii) は本当に簡単な積分計算。でも応用上は重要 (らしい)。(iii) が恐らく最も有名なメラン変換公式。

問題 17-3. (フレヴィッツのゼータ関数の積分表示)

不等式 $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対し、**フレヴィッツのゼータ関数** Hurwitz zeta function $\zeta(s,x)$ を無限級数 $\zeta(s,x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^s}$ で定義する。この級数は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対収束することが知られている[*13]。さて、関数 $G(t,x) = \dfrac{e^{(1-x)t}}{e^t - 1} = \dfrac{e^{-tx}}{1-e^{-t}}$ のメラン変換を考察することにより、フレヴィッツゼータ関数の積分表示

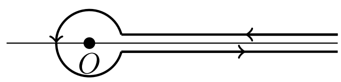
$$\Gamma(s)\zeta(s,x) = \int_0^{\infty} G(t,x)t^{s-1}\,dt \ (= \mathcal{M}(G(-,x))(s)) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

が得られることを確認しなさい。

参考 [数論 I , 3.3 節 (c)], [Hi93, Section 2.3 (2)], [Wa97, Proof of Theorem 4.2]

問題 17-4. (フレヴィッツ関数の解析接続と負の整数点での値)

極形式 $z = re^{i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ で表された複素数 z に対して複素対数関数 $\log(z)$ を $\log(z) = \log r + i\theta$ で定め、複素数 z に対して $z^s = e^{s\log(z)}$ と定める。



ハンケルの周回積分路
Hankel's contour

関数 $G(z,x)z^{s-1} = \dfrac{e^{(1-x)z}z^{s-1}}{e^z - 1}$ のハンケル周回積分路 (右図参照) での積分を考察することによって、関数 $(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\zeta(s,x)$ が複素平面上正則に解析接続されることを証明しなさい。また、その結果を用いてフレヴィッツのゼータ関数の負の整数点での値が

$$\zeta(1-n,x) = -\frac{B_n(x)}{n} \qquad (n > 0)$$

で与えられることを証明しなさい。但し $B_n(X)$ は第 n ベルヌーイ多項式とする。

[ヒント: 関数 $G(t,x)$ とベルヌーイ多項式の母関数を比較してみよう]

参考 [数論 I , 3.3 節 (c)], [Hi93, Section 2.3, Proposition 1 and Theorem 1], [Wa97, Theorem 4.2]

[*13] 定義より、合同ゼータ関数 $\zeta_{\equiv a (\mathrm{mod}\, N)}(s) = \displaystyle\sum_{\substack{n=1 \\ n\equiv a \mod N}}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ との関係は $\zeta_{\equiv a (\mathrm{mod}\, N)}(s) = N^{-s}\zeta(s, \dfrac{a}{N})$ となっています (各自確認してみよう)。

問題 17-5. (ディリクレ L 関数の負の整数点での値)

問題 17-4. の結果を用いて、ディリクレの L 関数 $L(\chi, s)$ が複素数平面上に有理型に (χ が非自明なときは正則に) 解析接続されることを確認しなさい。

また、ディリクレ L 関数の負の整数点での値が

$$L(\chi, 1-n) = -\frac{B_{n,\chi}}{n} \qquad (n > 0)$$

で与えられることを証明しなさい。[ヒント: 問題 16-5. を用いなさい]

参考 [数論 I , 3.3 節 (c)], [Hi93, Section 2.3, Proposition 1 and Theorem 1], [Wa97, Theorem 4.2]

■ 18. 久保田-レオポルトの p 進 L 関数 (その 1)

以下、(簡単のため) p は **奇** 素数とする。また、特に断らない限り χ は法 f のディリクレ指標を表す。また、

$$\omega_p \colon \mathbb{Z}_p^\times \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times \cong \mu_p \quad (\subseteq \mathbb{Z}_p^\times)$$

を p 進タイヒミュラー指標とする。有理数体の代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を一つ固定し、この埋め込みを通じて ω_p を導手 p のディリクレ指標と同一視する。最後に p **進円分指標** *p-adic cyclotomic character*

$$\kappa_{\mathrm{cyc}} \colon \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times \ ; \ \sigma \mapsto \kappa_{\mathrm{cyc}}(\sigma)$$

を、任意の 1 の p 冪根 ζ に対して $\zeta^\sigma = \zeta^{\kappa_{\mathrm{cyc}}(\sigma)}$ を満たす p 進整数 $\kappa_{\mathrm{cyc}}(\sigma)$ を ($\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ の元 σ に) 対応させる指標として定め、p 進単数 a に対し $\sigma_a = \kappa_{\mathrm{cyc}}^{-1}(a)$ とおく。

問題 18-1. (一般化ベルヌーイ数の関係式)

一般化ベルヌーイ数の母関数 (問題 16-2. 参照) を $F_\chi(t)$ と書く; 即ち

$$F_\chi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{\chi,m} \frac{t^m}{m!}$$

とする。ここで一般化ベルヌーイ数 $B_{\chi,m}$ を形式的に「文字 $\mathbb{B}_\chi$ の m 乗」のように見做して $\mathbb{B}_\chi^m$ と書くことにすると、等式

$$F_\chi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} B_{\chi,m} \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathbb{B}_\chi t)^m}{m!} = e^{\mathbb{B}_\chi t}$$

が成り立つ。この式と (形式的冪級数としての) 指数法則 $e^{(\mathbb{B}_\chi + fp^n)t} = e^{\mathbb{B}_\chi t} e^{fp^n t}$ を用いて、全ての 0 以上の整数 m, n に対して等式

$$\sum_{x=1}^{fp^n} \chi(x) x^m = \frac{1}{m+1} \{(\mathbb{B}_\chi + fp^n)^{m+1} - B_{\chi,m+1}\}$$

が成り立つことを証明しなさい。余力のある人は、上記の (形式的な記号 $\mathbb{B}_\chi$ を用いた) 計算が正当化出来ることを確認しなさい。

問題 18-2. (ヴィットの極限公式)

$\overline{\mathbb{Q}}_p$ の p 進完備化 $\mathbb{C}_p$ での等式

$$B_{\chi,m} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{fp^n} \sum_{x=1}^{fp^n} \chi(x)x^m$$

が成り立つことを 問題 18-1. の結果を用いて証明しなさい。

問題 18-3. (久保田-レオポルトの χ-平均化作用素)

以下、p 進付値は $|p|_p = p^{-1}$ となる様に正規化しておく。ディリクレ指標 χ の導手を f とし、$\tilde{f} = \mathrm{l.c.m.}(f,p)$ とおく。また、$L = \mathbb{Q}_p(\chi)$ とおく。

収束冪級数環 $\mathscr{F} = \left\{ A(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(u-1)^n \,\middle|\, a_n \in \mathbb{Q}_p, A(u) \text{ は } u \in 1+p\mathbb{Z}_p \text{ 上収束} \right\}$ にガウスノルム $\|A\| = \sup_{n\geq 0} |a_n|_p p^{-n}$ を入れてバナッハ環と見做す[*14]。バナッハ環 $\mathscr{F}$ 上の (L-) 線形汎関数 $\mathfrak{M}_\chi^{(n)} \colon \mathscr{F} \to L$ を

$$\mathfrak{M}_\chi^{(n)}(A) = \frac{1}{\tilde{f}p^n} \sum_{\substack{x=1 \\ (x,p)=1}}^{\tilde{f}p^n} \chi(x)A(\langle x \rangle)$$

で定める (但し $x \in \mathbb{Q}_p$ に対し、岩澤の括弧記号 $\langle x \rangle$ を $\langle x \rangle = x\omega_p^{-1}(x)$ で定める)。このとき以下の設問に答えなさい。

(1) $\mathfrak{M}_\chi^{(n)}$ が有界線形汎関数であること、即ち $|\mathfrak{M}_\chi^{(n)}(A)|_p \leq C_\chi^{(n)}\|A\|$ を満たす様な定数 $C_\chi^{(n)}$ が存在することを証明しなさい。

(2) 有界線形汎関数としての極限 $\mathfrak{M}_\chi = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\chi^{(n)}$ が存在すること、即ち

- 全ての $\mathscr{F}$ の元 $A(u)$ に対して $\mathfrak{M}_\chi(A) = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_\chi^{(n)}(A)$ かつ
- 或る (n によらない) 定数 C_χ が存在し、全ての $\mathscr{F}$ の元 $A(u)$ に対して不等式 $|\mathfrak{M}_\chi(A)|_p \leq C_\chi\|A\|$ が成り立つ

を満たす様な $\mathscr{F}$ 上の有界線形汎関数 $\mathfrak{M}_\chi$ が存在することを以下の手順に従って証明しなさい。$\mathfrak{M}_\chi$ を**久保田-レオポルトの χ-平均化作用素** χ-Mittel と呼びます。

Step 1. $|\tilde{f}p^{n-1}|_p < 1$ を満たす n に対して不等式

$$|\mathfrak{M}_\chi^{(n+1)}(A) - \mathfrak{M}_\chi^{(n)}(A)|_p \leq \left|\frac{1}{p}\right|_p \|A\| \qquad (= p\|A\|)$$

が成り立つことを証明しなさい。[ヒント: テイラー展開を用いて評価する]

Step 2. n に依存しない正の実数 C_χ が存在して、全ての自然数 n に対して不等式 $|\mathfrak{M}_\chi^{(n)}(A)|_p \leq C_\chi\|A\|$ が成り立つことを証明しなさい。

Step 3. $\{\mathfrak{M}_\chi^{(n)}(A)\}_{n=0}^{\infty}$ がコーシー列となることを証明しなさい。[ヒント: $|\tilde{f}p^n|_p < |p|_p$ を満たす n について、$|\mathfrak{M}_\chi^{(n+1)}(A) - \mathfrak{M}_\chi^{(n)}(A)|_p$ を具体的に評価しなさい]

[*14] $A(u)$ は 「1 の周りでのテイラー展開」の形で表されていることに注意。

問題 18-4. (p 進 L 関数の構成 I：久保田-レオポルトの構成)

p 進整数 s に対し、主単数群 $1+p\mathbb{Z}_p$ 上の関数 $u \mapsto u^{1-s}$ が $\mathscr{F}$ の元になることを確認しなさい。また、

$$L_p(\chi, s) = \frac{1}{s-1}\mathfrak{M}_\chi(u \mapsto u^{1-s})$$

と定めるとき、$L_p(\chi, s)$ が **補間公式** *interpolation formula*

$$L_p(\chi, 1-m) = (1-\chi\omega_p^{-m}(p)p^{m-1})L(\chi\omega_p^{-m}, 1-m)$$

を満たすことを証明しなさい。p 進 (有理型) 関数 $L_p(\chi, s)$ を **久保田-レオポルトの p 進 L 関数** Kubota-Leopoldt *p-adic zeta function* と呼びます。

※ 本節で取り上げた久保田とレオポルトによる有理数体の p 進 L 関数の最初の構成についてはあまり良い文献がありませんでしたので、上記の設問 (問題 17-1.–問題 17-4.) は原論文 Tomio Kubota und Heinrich-Wolfgang Leopoldt, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte* I: *Einführung der p-adischen Dirichletschen L-Funktionen*, J. Reine Angew. Math., **214/215**, 328–339 (1964) の該当箇所を編集致しました。原論文はドイツ語で書かれていますので、該当箇所を原論文にて参照するのは大変かもしれませんね。

■ 19. 久保田-レオポルトの p 進 L 関数 (その 2)

以下でも (簡単のため) p は <u>**奇**</u> 素数とする。χ を導手 f のディリクレ指標とし、$\tilde{f} = \mathrm{l.c.m.}(f, p)$ を素因数分解して $dp{\cdot}p^e$ と書くことにする (但し d は p と素な自然数で、e は非負整数)。$q_n = dp{\cdot}p^n$ とおき、自然な分解

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{q_n})/\mathbb{Q}) \cong \Delta_n \times \Gamma_n$$

を考える (但し Δ_n は位数が p と素な最大部分群で、Γ_n はシロー p 部分群)。

問題 19-1. (スティッケルベルガー元)

群環 $\mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{q_n})/\mathbb{Q})]$ を以下で定め、(法 q_n の) **スティッケルベルガー元** Stickelberger element と呼ぶ;

$$\xi_n = \sum_{\substack{a=0\\(a,q_n)=1}}^{q_n-1} \zeta_{\equiv a \pmod{q_n}}(0)\sigma_a^{-1}.$$

このとき以下の設問に答えなさい。

(1) 問題 17-4. の結果を用いて ξ_n は $\xi_n = \frac{1}{2}\sum_{\substack{a=0\\(a,q_n)=1}}^{q_n-1}\sigma_a^{-1} - \frac{1}{q_n}\sum_{\substack{a=0\\(a,q_n)=1}}^{q_n-1} a\sigma_a^{-1}$ と書き表されることを確認しなさい。

(2) 自然な写像 $\mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{q_{n+1}})/\mathbb{Q})] \twoheadrightarrow \mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{q_n})/\mathbb{Q})]$ により ξ_{n+1} が ξ_n にうつることを示しなさい。この性質を $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ の **分布性質** *distribution property* と呼びます。

参考 [SS03, 水澤靖さんの稿, 第 4 節, 定理 7 (iii)], [La90, Chapter 2, Section 2, B4], [Wa97, Proposition 7.6 (c)]

問題 19-2. (コーツの条件 D(p) と C(p))

c を dp と素な自然数とするとき、部分ゼータ関数の特殊値について以下の性質が成り立つことを証明しなさい。

D(p): 値 $c\zeta_{\equiv a (\mathrm{mod}\, q_n)}(0) - \zeta_{\equiv ac (\mathrm{mod}\, q_n)}(0)$ は p 進整数となる。

C(p): 合同式

$$c^{k+1}\zeta_{\equiv a (\mathrm{mod}\, q_n)}(-k) - \zeta_{\equiv ac (\mathrm{mod}\, q_n)}(-k) \equiv (ac)^k \{c\zeta_{\equiv a (\mathrm{mod}\, a)}(0) - \zeta_{\equiv ac (\mathrm{mod}\, q_n)}(0)\} \mod q_n$$

が任意の非負整数 n に対して成立する。

参考 [SS03, 水澤靖さんの稿, 第 4 節, 定理 7 (i)(ii)], [La90, Chapter 2, Section 2, Theorem 2.1], [Wa97, Proposition 7.6 (a), (b)] ([SS03], [Wa97] は D(p) のみ)

※ [La90, p. 38] での (c を用いた) p 進測度の作り方は、本設問での c の付け方とは微妙に異なっているので注意して下さい。証明は全く同様に出来ます。

問題 19-3. (p 進 L 関数の構成 II: 岩澤のスティッケルベルガー構成)

以下 $\mathcal{O}_\chi = \mathbb{Z}_p[\mathrm{Im}(\chi)]$ とおく。c を dp と素な整数とし、$\chi^{-1}\omega_p$-捻り写像

$$\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{q_n})/\mathbb{Q})] \to \mathcal{O}_\chi[\Gamma_n] \ ; \ \tau \mapsto \chi^{-1}\omega_p(\tau)\bar{\tau}$$

による $(c-\sigma_c)\xi_n$ の像を $\eta_{c,n}^{(\chi)}$ と定めよう (但し $\bar{\tau}$ は τ の Γ_n での像とする)。

(1) 問題 18-2. の条件 D(p) を用いて、$\{\eta_{c,n}^{(\chi)}\}_{n=0}^{\infty}$ が岩澤代数 $\mathcal{O}_\chi[[\Gamma]] = \varprojlim_n \mathcal{O}_\chi[\Gamma_n]$ の元 $\eta_c^{(\chi)}$ を定めることを確認しなさい。

(2) 群環 $\mathcal{O}_\chi[[\Gamma]]$ の元 $v_{c,n}^{(\chi)}$ を $v_{c,n}^{(\chi)} = c - \chi^{-1}\omega_p(c)\bar{\sigma}_c$ と定めるとき、$\{v_{c,n}^{(\chi)}\}_{n=0}^{\infty}$ も岩澤代数 $\mathcal{O}_\chi[[\Gamma]]$ の元 $v_c^{(\chi)}$ を定めること (つまり $\{v_{c,n}^{(\chi)}\}_{n=0}^{\infty}$ が射影系をなすこと) を確認しなさい。また、その極限 $v_c^{(\chi)}$ が具体的にどのような元になるか書き下しなさい。

(3) 岩澤代数の商体 $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_\chi[[\Gamma]])$ の元 $\mathcal{L}_p(\chi)$ を

$$\mathcal{L}_p(\chi) = \frac{\eta_c^{(\chi)}}{v_c^{(\chi)}}$$

で定める。このとき、$\mathcal{L}_p(\chi)$ は最初に選んだ自然数 c によらずに定まることを確認しなさい。また、p 進円分指標が Γ に引き起こす指標をやはり κ_{cyc} で表すことにするとき、任意の自然数 m に対して補間公式

$$\kappa_{\mathrm{cyc}}^{1-m}(\mathcal{L}_p(\chi)) = (1-\chi\omega_p^{-m}(p)p^{m-1})L(\chi\omega_p^{-m}, 1-m)$$

が成り立つことを問題 19-2. の条件 C(p) を用いて確認しなさい[*15]。

参考 [SS03, 水澤靖さんの稿, 第 4 節, 定理 8], [La90, Chapter 4, Section 3, Theorem 3.2], [Wa97, Theorem 7.10] ※ [La90] は用語が測度論的

※ [SS03], [Iw72], [Wa97] 等では、補間性質の証明の際に合同式 C(p) を用いる代わりにヴィットの極限公式 (問題 18-2) を利用しています。

*15 つまり問題 18-4. の記号を用いると、『任意の p 進整数 s に対して $L_p(\chi, s) = \kappa_{\mathrm{cyc}}^{s}(\mathcal{L}_p(\chi))$ が成り立つ』ことを意味しています。この様な性質を持つ岩澤代数の元 $\mathcal{L}_p(\chi)$ (または $\eta_c^{(\chi)}$) をセールの同型 (問題 10-2.) を用いて 1 変数形式的冪級数 (の商) と見做したものを **岩澤冪級数** Iwasawa *power series* と呼びます。

問題 19-4. (p 進 L 関数の応用: クンマーの合同式)

p 進 L 関数 $\mathcal{L}_p(\chi)$ の存在を用いて、以下の合同式を証明しなさい。

(i) (クンマーの合同式)

$m \equiv n \not\equiv 0 \mod p-1$ を満たす正の偶数 m, n に対し、或る正の整数 a が存在して $m \equiv n \mod p^a(p-1)$ が成り立つならば、合同式

$$(1-p^m)\zeta(1-m) \equiv (1-p^n)\zeta(1-n) \mod p^a$$

が成り立つ。さらに両辺ともに $\mathbb{Z}_p$ の元となる。

(ii) $p-1$ で割り切れない正の偶数 n に対して合同式

$$L(\omega_p^{n-1}, 0) \equiv \zeta(1-n) \mod p$$

が成り立つ。さらに両辺ともに $\mathbb{Z}_p$ の元となる。

参考 [SS03, 水澤靖さんの稿, 第 5 節], [La90, Chapter 2, Section 2, Corollary 1, Theorem 2.5], [Wa97, Corollary 5.14, Corollary 5.15]

※ 本節の内容 (p 進 L 関数のスティッケルベルガー構成) に関しては、より一般の場合、即ち **総実代数体上の L 関数** の場合に三浦崇さんに解説していただく予定です。

※ 久保田-レオポルトの p 進 L 関数構成方法は、今回取り上げたもの以外にも、アミース-フレネル Amice-Fresnel の構成、コールマン-岩澤 Coleman-Iwasawa の構成等、それこそ数えきれない程沢山の構成が知られています (例えば [Wa97] の p. 84 に主要な結果がまとめられています)。特に後者の **コールマン冪級数** Coleman *power series* を用いた構成は岩澤主予想を含む色々な応用面でも非常に重要なものです (次の節で扱っている円単数とも密接に関わる構成です)。岩澤-コールマン構成は [CS06] や [Wa97] で取り上げられていますので、興味のある方は是非チャレンジしてみて下さい!!! ([SS03] の都地崇恵さんの稿も参照のこと)

※ 通常 (複素数の世界での) ゼータ関数/L 関数は、何らかのディリクレ級数を (有理型に) 解析接続したものを表していましたので、このように “L 関数の構成方法が沢山ある” という現象は複素数の世界とは大きく異なる「p 進の世界独特の現象」と言えるでしょう (勿論その様な現象が生じる原因は、p 進 L 関数を「補間性質を満たすもの」として特徴付けていることに起因しています)。興味のある方は、(特に久保田-レオポルトの p 進 L 関数の) 様々な構成法を比較検証してみるのも良いかもしれません。

■ 20. 円単数

m を自然数とし、$F_m = \mathbb{Q}(\mu_m)^+$ で円分体 $\mathbb{Q}(\mu_m)$ の最大総実部分体を表すこととする。また、

$$\mathscr{S} = \{r \in \mathbb{N} \mid r \text{ は平方因子を持たず、 } \ell \equiv \pm 1 \mod m \text{ を満たす素数のみ素因数に持つ }\}$$
$$\mathscr{S}_M = \{r \in \mathscr{S} \mid r \text{ は } \ell \equiv 1 \mod M \text{ を満たす素数のみ素因数に持つ }\}$$

とおく (但し M は正の整数)。

問題 20-1. (円単数のオイラー系)

m 及び $\ell \equiv \pm 1 \mod m$ を満たす素数 ℓ に対して、原始 m 乗根 ζ_m 及び原始 ℓ 乗根 ζ_ℓ をそれぞれ固定した上で、各 $\mathscr{S}$ の元 r に対して

$$z_m(r) = \left(\zeta_m \prod_{\ell \mid r} \zeta_\ell - 1\right)\left(\zeta_m^{-1} \prod_{\ell \mid r} \zeta_\ell - 1\right)$$

とおく。

(1) $z_m(r)$ は $F_m(\mu_r)^\times$ の元となることを示しなさい。

(2) $r > 1$ のとき、$z_m(r)$ は $F_m(\mu_r)$ の整数環の単数となることを証明しなさい。

[ヒント: $\zeta_m \prod_{\ell \mid r} \zeta_\ell - 1, \zeta_m^{-1} \prod_{\ell \mid r} \zeta_\ell - 1$ がそれぞれ単数となることを証明すれば十分。そのためには $\mathbb{Q}(\mu_{mr})$ の各素イデアル $\mathfrak{q}$ に於いて、それぞれの数が法 $\mathfrak{q}$ で 0 と合同にならないことを見れば良い]

(3) ガロワ群の自然な同型

$$\mathrm{Gal}(F_m(\mu_r)/F_m) \cong \mathrm{Gal}(F_m(\mu_{\ell_1})/F_m) \times \cdots \times \mathrm{Gal}(F_m(\mu_{\ell_s})/F_m)$$

が存在することを証明しなさい (但し $\ell_1, \ldots, \ell_s$ は r の相異なる素因数とする)。また、この同型を用いて各 $\ell \mid r$ に対して $\mathrm{Gal}(F_m(\mu_\ell)/F_m)$ を $\mathrm{Gal}(F_m(\mu_r)/F_m)$ の部分群と同一視するとき、等式

$$N_\ell(z_m(r)) \left(:= \sum_{\tau \in \mathrm{Gal}(F_m(\mu_\ell)/F_m)} \tau z_m(r) \right) = (\mathrm{Frob}_\ell - 1) z_m(r/\ell)$$

が成り立つことを示しなさい。ここで $\mathrm{Gal}(F_m(\mu_{r/\ell})/F_m)$ の元 Frob_ℓ は (数論的) ℓ 乗フロベニウス元を表すものとする。

(4) r の任意の素因数 ℓ 及び ℓ の上に或る $F_m(\mu_r)$ の任意の素イデアル $\mathfrak{l}$ に対して、合同式 $z_m(r) \equiv z_m(r/\ell) \mod \mathfrak{l}$ が成り立つことを示しなさい。

※ これ等の性質 (特に (3), (4)) を満たす様な元の系列は **オイラー系** Euler system と呼ばれています[16]。特に各 $z_m(r)$ は**円単数** cyclotomic unit / circular unit[17] ですので、$\{z_m(r)\}_{r \in \mathscr{S}}$ は**円単数のオイラー系** と呼ばれています。

なお、(3) の条件は、$z_m(r)$ と $z_m(r/\ell)$ はノルム写像で移りあうわけではないけれど、その「ずれ」$\mathrm{Frob}_\ell - 1$ をよく見てみるとゼータ関数の素数 ℓ での「オイラー因子」$1 - \ell^{-s}$ と非常に "良く似た" 形をしています。このようにノルム整合性の条件に於いて現れる因子 $\mathrm{Frob}_\ell - 1$ が「オイラー因子」のようなものであることがオイラー系という呼称の由来であると言われています。

参考 [SS03, 青木美穂さんの稿, 第 2.1 節], [La90, Appendix, Section 1], [Wa97, Lemma 15.9]

[16] ラングの教科書 [La90] の付録でルービンが採用している定義。別の定義については次の設問の注釈を参照。

[17] $\pm$(1 の冪根), $1 -$ (1 の冪根) の形の代数的整数の積で表される単数のこと。

問題 20-2. (円単数のオイラー系と円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大)

素数 p が m を割り切るとき、等式 $N_{F_{mp}(\mu_r)/F_m(\mu_r)}(z_{mp}(r)) = z_m(r)$ が成り立つことを証明しなさい。特に $\{z_{mp^k}(r)\}_{k=0}^{\infty}$ はノルム写像に関する射影系を成すことが従います。

※ $F_{mp^\infty}(\mu_r)$ は $F_m(\mu_r)$ の円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大なので、この性質は各 $\mathscr{S}$ の元 r に対して「$\{z_m(r)\}_{m\in\mathbb{N}}$ は円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大方向に射影系を成す」と言い表すことが出来ます。この事実は、例えば p 進 L 関数のコールマン冪級数を用いた構成や岩澤主予想の偶指標成分に於ける主張を記述する際に用いられる非常に重要な事実です。が、この問題自体はノルム写像に関する単なる簡単な練習問題ですので、チャレンジしてみてみましょう。

なお、ルービンによるオイラー系の教科書 [Ru00] では、問題 20-1. の条件 (1), (3) と「円分 $\mathbb{Z}_p$ 拡大方向に射影系を成す」という条件を満たすような元 $z_m(r)$ の系列のことをオイラー系と呼んでおり、こちらの条件の方がより一般的なオイラー系の公理とされているようです。

問題 20-3. (円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大方向のノルム系)

r は素数 p と互いに素であるとする。また、α_k を $F_{mp^k}(\mu_r)^\times$ の元とし、$\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ はノルム写像に関して射影系を成すと仮定する。

このとき、各自然数 k に対して α_k は p 単数 (即ち p と素な素イデアル $\mathfrak{l}$ に対して α_k の $\mathfrak{l}$ での加法的付値が 0) となることを証明しなさい。

問題 20-4. (コリヴァーギン導分)

$\ell \equiv \pm 1 \mod m$ を満たす素数 ℓ に対し、巡回群 $\mathrm{Gal}(F_m(\mu_\ell)/F_m)$ の生成元 σ_ℓ を固定し、群環 $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(F_m(\mu_\ell)/F_m)]$ の元 $\mathbb{D}_\ell$ を

$$\mathbb{D}_\ell = \sum_{i=1}^{\ell-2} i\sigma_\ell$$

で定める。また、$\mathscr{S}$ の元 r に対して (問題 20-1. (3) の同型を用いて) $\mathbb{D}_r = \prod_{\ell|r} \mathbb{D}_\ell$ と定める。

(1) 群環 $\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(F_m(\mu_\ell)/F_m)]$ に於いて $(\sigma_\ell - 1)\mathbb{D}_\ell = (\ell - 1) - N_\ell$ が成り立つことを確認しなさい。

(2) r が $\mathscr{S}_M$ の元であるとき、$\mathbb{D}_r z_m(r)$ は $(F_m(\mu_r)^\times/(F_m(\mu_r)^\times)^M)^{\mathrm{Gal}(F_m(\mu_r)/F_m)}$ の元となることを、r の素因子の数に関する数学的帰納法により証明しなさい。

(3) $\mathscr{S}_M$ の元 r に対して、$F_m^\times/(F_m^\times)^M$ の元 $\kappa_m(r)$ で合同式

$$(\flat):\quad \kappa_m(r) \equiv \mathbb{D}_r z_m(r) \mod (F_m(\mu_r)^\times)^M$$

を満たすものが存在することを、以下の手順に従って証明しなさい。また、r と互いに素な F_m の素イデアル $\mathfrak{l}$ に対し、$v_\mathfrak{l}(\kappa_m(r)) \mod M$ が 0 となることを確認しなさい (但し $v_\mathfrak{l}$ は $\mathfrak{l}$ に於ける正規離散付値とする)。

Step. 1. $\mathrm{Gal}(F_m(\mu_r)/F_m)$ の元 σ に対して $c_r(\sigma) = ((\sigma - 1)\mathbb{D}_r z_m(r))^{1/M}$ と定めるとき、c_r は $F_m(\mu_r)^\times$-値の 1-余輪体 (1-コサイクル) となることを (2) の結果を用いて確認しなさい。

Step. 2. ヒルベルトの定理 90 (問題 9-4.) を用いて、各 $\mathrm{Gal}(F_m(\mu_r)/F_m)$ の元 τ に対して $(\tau-1)\beta = c_r(\tau)$ を満たす $F_m(\mu_r)^\times$ の元 β が ($F_m^\times$ の元に依る定数倍の不定性を除いて一意に) 存在することを示しなさい。

Step. 3. $\kappa_m(r) = \mathbb{D}_r z_m(r)/\beta^M$ とおくと、 $\kappa_m(r)$ が $F_m^\times$ の元となり、合同式 ($\flat$) を満たすことを証明しなさい。

※ このようにして定義された $F_m^\times$ の元 $\kappa_m(r)$ を $z_m(r)$ の **コリヴァーギン導分** Kolyvagin derivative class と呼びます。

参考 [SS03, 青木美穂さんの稿, 補題 3, 補題 4], [CS06, Section 5], [La90, Appendix, Lemma 2.1, Lemma 2.2], [Wa97, Proposition 15.10]

※ オイラー系を用いた有理数体の岩澤主予想の証明では、上記の円単数のオイラー系とそのコリヴァーギン導分を用いて、チェボタレフの密度定理を用いた非常に精緻な議論が展開されます。興味のある方は [SS03] の青木美穂さんの稿や [CS06, Section 5, Section 6], [La90] の付録, [Wa97, Section 15] 等をご覧下さい。

コラム **コリヴァーギン導分についての補足** (大下達也さんからのコメント)

r の素因数 ℓ の上にある F_m の素イデアル $\mathfrak{l}$ に対して、$z_m(r)$ のコリヴァーギン導分 $\kappa_m(r)$ の加法的付値 $v_{\mathfrak{l}}(\kappa_m(r)) \mod M$ は $\kappa_m(r/\ell)$ を用いて記述することが出来ることが知られています ([La90, Appendix, Proposition2.4] を参照のこと)。この事実は、「$\kappa_m(r)$ で生成される単項イデアル」を考えることで、「ℓ の上の素イデアル $\mathfrak{l}$ の属するイデアル類 $[\mathfrak{l}]$ の "位数" を[*18] $\kappa_m(r/\ell)$ を用いて抑える (或いは零化元を与える) ことが出来る」ということを意味しています。オイラー系を用いた岩澤理論の証明は、大雑把に言えばこの原理に基づいて、チェボタレフの密度定理を用いた精巧な帰納的議論によって $r \in \mathscr{S}_M$ (或いはコリヴァーギン導分 $\kappa_m(r)$) を順次適切に選んでゆくことでイデアル類群の大きさを抑える、という手法で行われます。

コラム **オイラー系について** 本節では円単数のオイラー系について簡単に紹介しました。円単数のオイラー系は「ノルム写像に関する整合性を持つ単数の族」でしたが、クンマー理論 (第 4 節 及び問題 9-5. 参照) を介して考えると、「ノルム写像 (余制限写像) に関する良い整合性を持つ (ガロワ加群 μ_{p^∞} の) 第 1 ガロワコホモロジー群の元の族」といった形で捉え直すことが出来ます。このようにガロワコホモロジーを通して再解釈することで、一般の p 進表現に対しても「余制限写像に関する良い整合性を持つコホモロジー類の族」としてオイラー系の公理を一般化することが出来ます (オイラー系の公理の詳細は [Ru00] を参照して下さい)。この様な一般化されたオイラー系として、加藤和也さんはジーゲル単数と呼ばれるモジュラー曲線上の可逆な有理型関数から今日 **ベイリンソン-加藤のオイラー系** と呼ばれるオイラー系を構成し、それを用いて楕円保型形式の岩澤主予想の「片方の包含関係」をほぼ完全な形で証明することに成功しました。

円単数のオイラー系とベイリンソン-加藤のオイラー系以外のオイラー系の例としては、(やはり「単数の族」である) 楕円単数のオイラー系が挙げられ、ルービンによる虚二次体の (2 変数) 岩澤主

*18 正確には,「体 F_m のイデアル類群を、r/ℓ の上にある素イデアルの類達で生成される部分群で割った剰余群に於ける ℓ の上の素イデアル $\mathfrak{l}$ の位数」と書くべきもの。

予想の証明の核心となっています。実は (ルービンが [Ru00] に於いて公理化している意味での) オイラー系と呼べるものはこの 3 種類程度のものしか知られておらず、オイラー系は岩澤理論を中心に非常に強力な道具立てとなっているにも拘らず例自体が非常に少ないという非常にもどかしい状況に立たされています[*19]。

一方で (ルービンによる) オイラー系の公理より弱い公理しか満たさない、或いは若干違った公理を満たすような元の系列は他にも色々と知られており、例としては所謂「ガウス和 (型) のオイラー系」や「(モジュラー曲線の) ヒーグナー点のなすオイラー系 (或いはコリヴァーギン系)」などが挙げられます。これ等の「ちょっと変わった」オイラー系達も勿論大変役に立つ対象であり、例えば前者はコリヴァーギンによる $\mathbb{Q}(\mu_p)$ のイデアル類群の p シロー部分群 (の奇指標成分) に関する仕事や青木美穂さんによるアーベル体の岩澤主予想の「ガウス和のオイラー系」を用いた証明 ([SS03] のご本人による解説記事も参照して下さい)、栗原将人さんによる岩澤理論の精密化やセルマー群の構造の精密な解析等に於いて効果的に用いられていますし、後者はコリヴァーギンによる $\mathbb{Q}$ 上定義された (虚二次体 K 上の解析的階数が 1 となるような) 楕円曲線のモーデル-ヴェイユ 階数に関するバーチ・スウィナトン-ダイヤー予想やテイト・シャファレヴィッチ群の有限性に関する仕事 (簡潔に言えば「バーチ・スウィナトン-ダイヤー予想の部分的解決」)、及びマッシーモ・ベルトリーニとアンリ・ダルモンによる「楕円曲線の反円分岩澤主予想」の証明に用いられたりしています。とは言え、今後新しく「オイラー系のようなもの」が発見されたとしてもそれが必ずしもルービンの公理を全て満たす様なオイラー系になるとは限らないこと、また、[Ru00] に於けるオイラー系の公理も現時点ではこれが或る意味で「最良の」ものとして採用されているというだけで、今後より良いものに改良されるべきかもしれないということには注意しておいた方が良さそうです。

■ 21. スティッケルベルガーの定理とエルブラン (-リベ) の定理

問題 21-1. (スティッケルベルガーの定理)

スティッケルベルガー元 ξ_n (問題 19-1. 参照) を修正して得られる $\mathbb{Q}[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_{q_n})/\mathbb{Q})]$ の元

$$\xi_n' = \xi_n - \frac{1}{2}\sum_{\substack{a=0 \\ (a,q_n)=1}}^{q_n-1} \sigma_a^{-1} = -\sum_{\substack{a=0 \\ (a,q_n)=1}}^{q_n-1} \frac{a}{q_n}\sigma_a^{-1}$$

を考える。このとき、$\mathbb{Q}(\mu_{q_n})$ のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_{q_n}))$ と ξ_n' との関係を記述する **スティッケルベルガーの定理** Stickelberger's theorem の主張を調べなさい。興味がある人は証明も試みなさい。[ヒント:ガウス和の素イデアル分解を考察する]

参考 [SS03, 山本現さんの稿, 第 1 節], [数論 II, 定理 10.39], [La90, Chapter 1, Theorem 2.4, Theorem 2.5], [Wa97, Theorem 6.10]

*19 近年 Antonio Lei, David Loeffler, Sarah Livia Zerbes が新たに「オイラー系」を構成したというプレプリントを発表しましたが、ルービンの公理を満たすオイラー系になっているかどうかはまだ (少なくとも編集者は) 確認しておりません。

問題 21-2. (エルブランの定理)

p を奇素数とし、$\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ の p シロー部分群 $A = \mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))\{p\}$ を冪等元

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{\omega^i} = \frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\omega^i(a)\sigma_a^{-1}$$

を用いて $A = \bigoplus_{i=0}^{p-2} A_i$, $A_i = \varepsilon_i A$ と分解する[*20]。このとき、A_i の位数とベルヌーイ数 B_{p-i} (つまり $\zeta(1-(p-i))$ の分子) との関係についての **エルブランの定理** Herbrand's theorem の主張を調べなさい。また、エルブランの定理を 問題 21-1. (スティッケルベルガーの定理) と 問題 19-4. (2) を用いて証明しなさい。

参考 [SS03, 山本現さんの稿, 第 2 節], [数論 II, 定理 10.1, 系 10.38], [La90, Chapter 1, Theorem 3.1 の Corollary 3], [Wa97, Proposition 6.16, Theorem 6.17]

※ 問題 19-1. の定義からも見て取れる様に、スティッケルベルガー元は **ゼータ関数の特殊値** と密接な関係を持つ特殊な元です (此のことはスティッケルベルガー元を用いて p 進 L 関数が構成出来ることを鑑みても納得出来るでしょう)。そのスティッケルベルガー元が円分体のイデアル類群を零化することを主張するスティッケルベルガーの定理は、非常に古典的な定理ではありますが、**ゼータ関数** (の特殊値) という **解析的対象** と **イデアル類群** という **代数的対象** との間の関係を表す最も初期の結果の 1 つとも考えられ、既に岩澤理論的な雰囲気を色濃く感じさせる定理となっています。

エルブランによる古典的な定理も、リーマンゼータ関数の特殊値と円分体のイデアル類群の位数との関係を表す岩澤理論的な雰囲気を強く醸し出した定理です。この古典的なエルブランの定理の逆が成り立つことは、後にケネス・アラン・リベ Kenneth Alan Ribet により論文 A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbb{Q}(\mu_p)$ (Invent. Math, 1976) に於いて証明されました。リベの手法は「アイゼンシュタイン級数と尖点形式の間の合同関係式から、ガロワ表現の間の合同関係を導き、ガロワ・コホモロジー群の非自明な余輪体 (コサイクル) を構成する」という所謂 **「アイゼンシュタイン合同式の手法」** に基づいています。バリー・メイザーとアンドリュー・ワイルズによる有理数体の岩澤主予想の解決は、リベのこの手法をより深いレベルの保型形式に対して拡張することに依ってなされており、その意味でもエルブラン-リベの定理は有理数体の岩澤主予想の「原点」と見ることも出来ましょう。メイザーとワイルズの仕事の概略に興味がある方は、先ずはリベのこの仕事を振り返るのが (一見回り道の様に見えて) 最良の方策だと思います。また、リベによる「エルブランの定理の逆」の証明については [SS03, 栗原将人さんの稿, 第 1.3 節] も参照して下さい。

■ 22. 岩澤主予想

問題 21-1. (有理数体の岩澤主予想)

有理数体の岩澤主予想の主張を調べなさい。所謂 “マイナス版” (不分岐岩澤加群を用いた定式化) と “プラス版” (p 分岐岩澤加群を用いた定式化) がありますが (円単数を用いた定式化もあるけど)、余力があれば両方とも調べてその関係を観察してみよう。

参考 [SS03, 尾崎学さんの稿], [数論 II, 定理 10.35], [La90, Appendix, Theorem 5.1] (円単数を用いた定式化), [Wa97, Section 13]

[*20] A_i は、ガロワ群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ の元 τ が $\omega^i(\tau)$ 倍で作用する様な固有空間となっています。

問題 21-2. (岩澤主予想の帰結)

有理数体の岩澤主予想から以下のものが導かれることを証明しなさい。[ヒント: 岩澤降下 Iwasawa descent の議論]

(i) エルブラン-リベの定理

(ii) 負の奇数点 (臨界点) でのコホモロジー的リヒテンバウム予想 (主張を知らない場合は主張を調べるところから始めてみよう!)

参考　エルブラン-リベの定理に関しては [数論 II, 系 10.38] 等を参照

※ なお、岩澤降下の議論に於いては非常に繊細な技術的問題を色々と克服する必要があるため、上記のものも岩澤主予想から「直ちに」導かれる、 というわけではない ことは注記しておきます。

※ 本節の内容及び設問は、岡野恵司さんの講演 (及び演習問題) に於いても触れられる予定です。

コラム **岩澤主予想の証明について**　有理数体の岩澤主予想は、1984 年にバリー・メイザー Barry Mazur とアンドリュー・ワイルズ Andrew Wiles により、所謂「アイゼンシュタイン合同式」の手法を用いて証明されました。彼等の手法は、リベによる「エルブランの定理の逆」の証明 (問題 20-1. 及びその後の注釈参照) の際に用いられたテクニックをさらに洗練させたものであり、モジュラー曲線 (及びそのヤコビ多様体) の幾何構造の非常に精密な解析を駆使したものとなっています。その後肥田晴三 Haruzo Hida による保型形式の p 進族に関する仕事にも触発され、ワイルズはメイザーと自身の共同研究の結果を 1990 年に **総実代数体の岩澤主予想** へと拡張しました (今回のサマースクール前半でしばしば登場する「ワイルズの定理」とは、この結果のことです)。

他方、フランシスコ・セイン Francisco Thaine による **円単数** を用いたイデアル類群の大きさの評価に関する仕事に触発されたカール・ルービン Karl Rubin は、セインの用いた円単数の系列をさらに洗練して **円単数のオイラー系** と言う形に整理しました。さらには、それを用いて岩澤主予想 (メイザー-ワイルズの定理) の別証明を与えることが出来ることをラングの教科書 [La90] に付録として記しています。ルービンはその後 (ペラン-リウや加藤和也と共に) オイラー系の理論をより洗練させてゆき、虚二次体の岩澤主予想や虚数乗法を持つ楕円曲線の岩澤主予想をやはり (楕円単数の) オイラー系を用いて証明することに成功しています。また、加藤和也さんがモジュラー曲線上のジーゲル単数から構成したベイリンソン-加藤のオイラー系を用いて、楕円保型形式の岩澤主予想の「片方の包含関係」を証明したことは既に述べた通りです。

上記の「アイゼンシュタイン合同式の手法」による主予想の証明と「オイラー系の手法」による主予想の証明は、単なる別証というだけではなく **全く異なる性質の証明である** ことには注意しておく必要があるでしょう。前者は、アイゼンシュタイン級数と尖点形式の間の非自明な合同式から「(ガロワコホモロジー群の) 非自明な 1 余輪体を構成する」ことで「イデアル類群 (或いはセルマー群) が大きい」、即ち「岩澤加群の特性イデアルが p 進 L 関数の生成する単項イデアルに含まれる」ことを証明するものであるのに対し、後者は「(コリヴァーギン導分が生成する) 単項イデアルを沢山作る」ことで「イデアル類群 (或いはセルマー群) が小さい」、即ち「岩澤加群の特性イデアルが p 進 L 関数の生成する単項イデアルを含む」ことを証明するもので、両者の証明方法では **証明されるイデアルの包含関係が全く逆になっています**。代数体のイデアル類群の場合には、ディリクレ、デデキント等による **解析的類数公式** があるため、片方の包含関係からもう片方の包含関係も自動的に成立することが従います (所謂 **解析的類数公式のトリック**)。ところが、一般の p 進表現の場合には

「解析的類数公式」の様なものは全く知られていません[*21]。したがって一般の p 進表現に対する岩澤主予想の証明は、片方の包含関係を「アイゼンシュタイン合同式の手法」で、もう片方の包含関係を「オイラー系の手法」で示すことによってなされるべきであるとの哲学が形成されています。

このように、岩澤主予想はその証明に限っても非常に深淵で興味深い話題が尽きないのですが、残念ながら今回のサマースクールでは時間の関係上 (可換な/古典的な状況での) 岩澤主予想の証明には **一切触れません**。(可換な係数での) 岩澤主予想の証明のテクニックに関しては、また改めて別の勉強会の機会に取り扱われるであろうことを期待しております。これ等の話題に興味がある方は、先ずは 2003 年の整数論サマースクール報告集 [SS03] に掲載されている青木美穂さん、栗原将人さんの解説記事や、[数論 II] の解説をご覧になってみては如何でしょうか？

[*21] 例えば楕円曲線の岩澤主予想に於いては、解析的類数公式に当たるものはあのミレニアム問題の一つでもある **バーチ・スウィナトン-ダイヤー予想** BIRCH, SWINNERTON-DYER *conjecture* です (!!)

おまけ — 総実代数体の p 進 L 関数の新谷構成について

以降の第 23–25 節は、 **総実代数体の p 進 L 関数の新谷構成** に関する設問を取り扱っています。三浦崇さんの講演でも扱った様に、総実代数体の p 進 L 関数は部分ゼータ関数の特殊値に関するコーツの条件 $\mathrm{D}(p)$, $\mathrm{C}(p)$ さえ証明出来れば、岩澤健吉によるスティッケルベルガー構成 (問題 19-3. 参照) と全く同様の手順で構成することが出来ました。したがって総実代数体の p 進 L 関数の構成に於ける最大の関門は **条件 $\mathrm{D}(p)$, $\mathrm{C}(p)$ の正当化** にあると言っても過言ではありません。そして何故一般の総実代数体の場合にこれ等の条件を証明するのが非常に難しいかを追及して行くと、ディリクレ L 関数の場合は部分ゼータ関数の負の整数点での値が **ベルヌーイ数** (或いはベルヌーイ多項式の特殊値) と言う非常に分かりやすい数で記述出来ていたためにこれ等の条件の正当化が比較的容易だったのに対し、総実代数体の場合には部分ゼータ関数の特殊値が斯様に **簡便な形で書き表せない** というところに困難が隠されていることが見えてます。この困難を克服するための一つの方法が、大下達也さんや佐久川憲児さんの講演で扱われた所謂 **ドリーニュ-リベの q 展開原理** DELIGNE-RIBET *'s q-expansion principle* を用いる方法で、その手法には非常に高度な数論幾何学の知識が総動員されていました。

ここでは今回のサマースクールでは時間の関係上取り扱うことが出来ない **p 進 L 関数の新谷構成** について取り上げます。新谷の手法とは、総実代数体のデデキントゼータ関数やヘッケ L 関数の特殊値の研究に於いて新谷卓郎が導入した手法で、大雑把に言えば **考えているゼータ関数を錐のゼータ関数 (或いは「新谷のゼータ関数」) と呼ばれるより扱いやすいゼータ関数の適切な和として分解する** と言う手法です。この「錐のゼータ関数」は、言わば **多重ディリクレ級数** のような形をしているため、その特殊値はリーマンゼータ関数やディリクレ L 関数の場合と同様に “**捻られた多重ベルヌーイ数**” を用いて記述することが出来ます。このことに着目して、**より単純な「錐のゼータ関数」を p 進補間して p 進 L 関数を作ってしまおう** という戦略に則った方法が今日「p 進 L 関数の新谷構成」と呼ばれているもので、実際に カス-ノゲス Pierrette CASSOU-NOGUÈS や バルスキー Daniel BARSKY は条件 $\mathrm{C}(p)$, $\mathrm{D}(p)$ を証明するのみならず、「錐の p 進ゼータ関数」を具体的に書き下し、それらを組み合わせて総実代数体の p 進 L 関数を構成することに成功しています。

総実代数体の p 進 L 関数の新谷構成は、q 展開原理を用いた構成と比較すると比較的初等的な手法のみを用いて (数論幾何学の大道具を用いることなく) 実行することが出来、その過程も q 展開原理を用いた構成と比べて具体的である一方、ゼータ関数の “錐分割” の際にどうしても **多変数解析** が必要となり記述が繁雑になりがちです。そのような理由も手伝ってか、非常に明快な構成であるにも拘らず (新谷の手法そのものと比較しても) 世間一般には意外と知れ渡っていない印象を受けます。そこで今回、アフタースクール予習問題集の「おまけ」として実二次体の p 進 L 関数の構成を掲載することに致しました[22]。そのため他の設問と比較すると (特に p 進測度論に関する部分など) 若干専門知識が必要とされる部分が多いかもしれません が、頑張ればそれだけ実りのある問題に仕上がっているのではないかと思いますので、興味のある方は是非挑戦してみて下さい。

[22] 問題作成に当たっては大阪大学の川島誠さんに多大なご協力を賜わりました。

代数体のヘッケ L 関数の特殊値に対する新谷の手法に関しては [Neu92] の Kapitel VII で紹介されています。また、総実代数体の p 進 L 関数の構成に関する教科書としては [Hi93] の第 3.8 節及び第 3.9 節が挙げられます。さらに、新谷の手法に関する諸々の話題や最新の研究成果等に関しては、[SS12] に佐藤信夫さん、広瀬稔さんが素晴らしい解説記事を書かれているので、是非ご参照下さい。

前置きが長くなりました。それでは引き続き問題本編をお楽しみ下さい!

■ **設定** 以下、第 23–25 節に於ける共通の設定をまとめておきます。

F を実二次体とし、$\mathfrak{r}_F$ を F の整数環とする。また、ι_1, ι_2 を F の $\mathbb{R}$ への相異なる埋め込みとし、F の $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\oplus 2}$ への (対角) 埋め込み ι を

$$\iota = (\iota_1, \iota_2) \colon F \to F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{\oplus 2}\ ;\ \alpha \mapsto \alpha \otimes 1 \mapsto \boldsymbol{\alpha} = (\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)})$$

で定める。F から $\mathbb{Q}$ へのノルム写像 $N_{F/\mathbb{Q}}$ を N と略記する (つまり $N(\alpha) = \alpha^{(1)}\alpha^{(2)}$)。

$\mathfrak{f}$ を F の整イデアルとし、$H_{\mathfrak{f}}$ で F の法 $\mathfrak{f}$ の狭義射類体 strict ray class field modulo $\mathfrak{f}$ を表すこととする[*23]。このとき大域類体論により、アルティンの相互写像による同型

$$\mathrm{rec} \colon \mathrm{Cl}_{\mathfrak{f}}^{+} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(H_{\mathfrak{f}}/F)\ ;\ \mathfrak{a} \mapsto \sigma_{\mathfrak{a}}$$

が得られる (問題 6-1. も参照)。但し $\mathrm{Cl}_{\mathfrak{f}}^{+} \cong I_{\mathfrak{f}}/P_{\mathfrak{f}}^{+}$ は法 $\mathfrak{f}$ の狭義射類群 strict ray class group modulo $\mathfrak{f}$ を表す。$I_{\mathfrak{f}}$, $P_{\mathfrak{f}}^{+}$ 等の定義は以下の通り;

$$\begin{aligned} F_{\mathfrak{f}}^{+} &= \{x \in F \mid x \text{ は総正で、 } x \equiv 1 \mod \mathfrak{f}\}, \qquad E_{\mathfrak{f}}^{+} = \mathfrak{r}_F^{\times} \cap F_{\mathfrak{f}}^{+}, \\ I_{\mathfrak{f}} &= \{F \text{ の分数イデアル } \mathfrak{a} \text{ で } \mathfrak{f} \text{ と互いに素なもの }\}, \\ P_{\mathfrak{f}}^{+} &= \{x\mathfrak{r}_F \subset F (\text{分数単項イデアル}) \mid x \in F_{\mathfrak{f}}^{+}\}. \end{aligned}$$

最後に、有理数体の (固定された) 代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}$ の複素数体への埋め込み $\iota_\infty \colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ 及び p 進数体の (固定された) 代数的閉包 $\overline{\mathbb{Q}}_p$ への埋め込み $\iota_p \colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定しておく。また、$\mathbb{C}_p$ ($\overline{\mathbb{Q}}_p$ の p 進完備化) 上の乗法的付値 $|\cdot|_p$ は、$|p|_p = p^{-1}$ となる様に正規化されているものとする。

■ 23. 錐のゼータ関数と捻られた多重ベルヌーイ数

以下、素数 p は $\mathfrak{f}$ を割り切る、即ち $(p)|\mathfrak{f}$ が成り立つと仮定しよう[*24]。ガロワ群 $\mathrm{Gal}(H_{\mathfrak{f}}/F)$ の元 σ に対し、σ に関する部分ゼータ関数 partial zeta function を

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma, s) = \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F, \sigma_{\mathfrak{a}} = \sigma} \frac{1}{N\mathfrak{a}^s}$$

で定める。この級数は $\mathrm{Re}(s) > 1$ で絶対かつ広義一様収束し、複素平面全体に有理型に解析接続されることが知られている。以下の設問に於いて、$\mathfrak{b}$ は $\sigma_{\mathfrak{b}^{-1}} = \sigma$ を満たす分数イデアルとする。

[*23] 整イデアル $\mathfrak{f}$ は、補間しようとしているヘッケ L 関数のヘッケ指標の導手に当たるイデアルです。

[*24] p 進ゼータ関数を考察する時は p の上にある素イデアルに於けるオイラー因子は取り除いて考えるので、この仮定をおいても実用上全く問題はありません。

問題 23-1. (部分ゼータ関数の書き換えＩ)

対応

$$F_{\mathfrak{f}}^{+} \cap \mathfrak{b}/E_{\mathfrak{f}}^{+} \longrightarrow \{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F | \ \alpha \in F_{\mathfrak{f}}^{+} \text{ が存在して } \mathfrak{a} = \alpha\mathfrak{b}^{-1}\} \ ; \ \alpha \mapsto \alpha\mathfrak{b}$$

が全単射であることを示しなさい。この対応を用いて、部分ゼータ関数が

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma, s) = N\mathfrak{b}^s \sum_{\alpha \in F_{\mathfrak{f}}^{+} \cap \mathfrak{b}/E_{\mathfrak{f}}^{+}} \frac{1}{N(\alpha)^s}$$

と書き換えられることを示しなさい。

問題 23-2. (ディリクレの単数定理の応用)

ディリクレの単数定理を用いて、$E_{\mathfrak{f}}^{+}$ が階数 1 の自由アーベル群であることを示しなさい。

以下 $E_{\mathfrak{f}}^{+}$ の基底を ε で表すことにする。$\mathfrak{f} = (1)$ かつ $F = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ のときに $E_{\mathfrak{f}}^{+} = \mathfrak{r}_F^{\times,+}$ (即ち「総正な単数のなす群」) の基底 ε を一つ求めなさい[*25]。

問題 23-3. (新谷の単数定理 —$[F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}]_+$ の錐分割)

$F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{\oplus 2}$ の部分集合 $C(1)$, $C(1, \varepsilon)$, P_1, $P_{1,\varepsilon}$ を以下で定める;

$$\begin{aligned} C(1) &= \{t \cdot \mathbf{1} \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}, \qquad C(1, \varepsilon) = \{s \cdot \mathbf{1} + t \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mid s, t > 0\}, \\ P_1 &= P_{C(1)} = \{z = s \cdot \mathbf{1} \in C(1) \mid \ 0 < s \leq 1\} \\ P_{1,\varepsilon} &= P_{C(1,\varepsilon)} = \{z = s \cdot \mathbf{1} + t \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \in C(1, \varepsilon) \mid 0 < s \leq 1, 0 < t \leq 1\}. \end{aligned}$$

このとき、$C(1)$, $C(1, \varepsilon)$, P_1, $P_{1,\varepsilon}$ の表す領域を図示しなさい (特に、$C(1)$, $C(1, \varepsilon)$ が **開単体錐** *open simplicial cone* となっていることを確認しなさい)。また、$C = C(1) \cup C(1, \varepsilon)$ とおくとき、$[F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}]_+$ (即ち、同型 $F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ に於いて、$\{(x^{(1)}, x^{(2)}) \mid x^{(1)} > 0, \ x^{(2)} > 0\}$ に対応する部分) が

$$[F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}]_+ = \bigsqcup_{\eta \in E_{\mathfrak{f}}^{+}} \boldsymbol{\eta} C$$

と (多面錐 $\boldsymbol{\eta} C$ の非交和に) 分割出来ることを確認しなさい。

※ 本設問の最後の主張は、$[F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}]_+$ という空間への $E_{\mathfrak{f}}^{+}$ の (通常の掛け算による) 作用が、C という **多面錐** *polyhedral cone* **からなる基本領域をもつ**[*26]、と言い換えることが出来ます。実二次体の場合はディリクレの単数定理と「図示」によって比較的容易にこのような結論を得ることが出来ましたが、一般の総実代数体 F に対しても同様の事実が成り立つことが新谷卓郎によって示されています;

[*25] 二次体 F の単数群 $\mathfrak{r}_F^{\times}$ の自由部分の基底となる単数のことを実二次体 F の **基本単数** *fundamental unit* と呼びます。このとき、$E_{(1)}^{+} = \mathfrak{r}_F^{\times,+}$ の基底は基本単数かその 2 乗で表されます (確認してみよう)。

[*26] より正確には「$\mathbb{Q}$-有理多面錐からなる基本領域を持つ」と言った方が良いでしょう。

F を総実代数体とし、E を $\mathfrak{r}_F^{\times,+}$ の位数有限の部分群とする。このとき $[F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}]_+$ 内の或る $\mathbb{Q}$-有理的多面錐 C を用いて $[F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}]_+$ を

$$[F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}]_+ = \coprod_{\eta\in E}\eta C$$

と分解することが出来る; 即ち C は E の $F\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ への作用に関する基本領域となる。

この定理は今日 **新谷の単数定理** *Shintani's unit theorem* (或いは **新谷分割** *Shintani decomposition*) と呼ばれています。

新谷の単数定理が整数論に齎した影響は計り知れません。例えば 問題 23-1. の式の右辺の和に於いて α が走る添字集合 $F_{\mathfrak{f}}^+\cap\mathfrak{b}/E_{\mathfrak{f}}^+$ は、商集合であるために非常に捕らえ所がなく、そのことが有理数体以外の代数体に対する (部分) ゼータ関数の解析を困難にしていました。ところが新谷の単数定理のおかげで、その商集合の代表元を**多面錐 C という幾何的に良い性質を持つ具体的な集合から選ぶことが出来る** ようになったため、右辺のディリクレ級数の解析が大いに進展しました (次の問題 23-4. も参照)。またこのことから、新谷分割で現れた開単体錐ごとにゼータ関数を考えるという **錐のゼータ関数** (或いは「新谷のゼータ関数」) の考え方が自然と現れてきたのです。

新谷の単数定理の証明自体はディリクレの単数定理に根差した技巧的な議論によってなされます。興味のある方は [Hi93, Section 2.4] や [Neu92, Kapitel Ⅶ] 等を参照して下さい。

問題 23-4. (部分ゼータ関数の書き換えⅡ)

問題 23-1. 及び 問題 23-3. の結果を用いて、部分ゼータ関数 $\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma,s)$ が

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma,s) &= N\mathfrak{b}^s\sum_{\alpha\in C\cap F_{\mathfrak{f}}^+\cap\mathfrak{b}}N(\alpha)^{-s}\\ &= N\mathfrak{b}^s\left[\sum_{z\in P_1\cap F_{\mathfrak{f}}^+\cap\mathfrak{b}}\sum_{m=0}^{\infty}N(z+m)^{-s}+\sum_{z\in P_{1,\varepsilon}\cap F_{\mathfrak{f}}^+\cap\mathfrak{b}}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}N(z+m_1+m_2\varepsilon)^{-s}\right]\end{aligned}$$

と書き直されることを示しなさい。

問題 23-5. (補助的な整イデアル $\mathfrak{c}$ の導入)

二次体 F の絶対共役差積を $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_F$ で表すことにする。F の整イデアルを、以下の 2 条件を満たすように任意にとる;

(C1) $\mathfrak{c}$ は $\mathfrak{f}$ とも $\mathfrak{D}$ とも互いに素;

(C2) $c=\sharp(\mathfrak{r}_F/\mathfrak{c})$ と定めるとき、同型 $\mathbb{Z}/c\mathbb{Z}\cong\mathfrak{r}_F/\mathfrak{c}$ が成り立つ。

F から $\mathbb{Q}$ へのトレース写像 $\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$ を Tr と略記することにし、$\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}$ の元 ν を $\mathrm{Tr}(\nu)=b/c$ (但し b と c は互いに素) となるようにとる。このとき、$\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Tr}(\nu)), \exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Tr}(\varepsilon\nu))$ は共に 1 の原始 c 乗根となることを示しなさ

い。また、$\mathfrak{r}_F$ の元 α に対し、関係式

$$\sum_{\mu=0}^{c-1}\exp(2\pi\mu\sqrt{-1}\mathrm{Tr}(\alpha\nu))=\begin{cases}c & \alpha \text{ が } \mathfrak{c} \text{ の元であるとき,}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

が成り立つことを示しなさい。

※ ここで導入された整イデアル $\mathfrak{c}$ は、久保田-レオポルトの p 進 L 関数のスティッケルベルガー構成 (第 19 節参照) の際に導入された補助的な自然数 c (問題 19-2. 参照) の役割を果たす「補助的な整イデアル」です。

問題 23-6. (部分ゼータ関数の書き換えIII)

以下、**問題** 23-6. **の条件を満たす** $\mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}$ **を一つ固定する**。F の整イデアル $\mathfrak{b},\mathfrak{c}$ に対して

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}^{-1},\mathfrak{c},s)=N\mathfrak{c}^{1-s}\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma_{\mathfrak{b}^{-1}\mathfrak{c}^{-1}},s)-\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma_{\mathfrak{b}^{-1}},s)$$

と定めよう。整イデアル $\mathfrak{c}$ が 問題 23-5. の条件 (C1), (C2) を満たす様に選んだとき、問題 23-4. 及び 問題 23-5. の結果を用いて $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}^{-1},\mathfrak{c},s)$ を

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}^{-1},\mathfrak{c},s)=&N\mathfrak{b}^{s}\sum_{\mu=1}^{c-1}\sum_{z\in P_1\cap F_{\mathfrak{f}}^{+}\cap\mathfrak{b}}\xi_z^{\mu}\sum_{m=0}^{\infty}\xi_1^{m\mu}N(z+m)^{-s}\\&+N\mathfrak{b}^{s}\sum_{\mu=1}^{c-1}\sum_{z\in P_{1,\varepsilon}\cap F_{\mathfrak{f}}^{+}\cap\mathfrak{b}}\xi_z^{\mu}\sum_{m_1,m_2=0}^{\infty}\xi_1^{m_1\mu}\xi_{\varepsilon}^{m_2\mu}N(z+m_1+m_2\varepsilon)^{-s}\end{aligned}$$

と書き直すことが出来ることを示しなさい。 但し $\mathfrak{r}_F$ の元 α に対して 1 の c 乗根 ξ_α を $\xi_\alpha=\exp(2\pi\sqrt{-1}\mathrm{Tr}(\alpha\nu))$ で定めることとします。

問題 23-7. (錐のゼータ関数)

自然数 d, r, 正の実数 $a_{i,j}$ (但し $1\le i\le d, 1\le j\le r$), 実数 x_i (但し $1\le i\le d$), 2 以上の自然数 c_j 及び 1 の原始 c_j 乗根 ξ_j (但し $1\le j\le r$) が与えられているものとする。d 行 r 列行列 A、d 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$ 及び r 次列ベクトル $\boldsymbol{\xi}$ をそれぞれ $A=(a_{i,j})_{1\le i\le d,1\le j\le r}$, $\boldsymbol{x}={}^t(x_1,\ldots,x_d)$, $\boldsymbol{\xi}={}^t(\xi_1,\ldots,\xi_r)$ で定めよう。このとき、組 $(A,\boldsymbol{x})$ に付随する $\boldsymbol{\xi}$ **で捻った** (d **変数の**) **錐のゼータ関数** $\zeta(s,A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ を

$$\zeta(\boldsymbol{s},A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\sum_{m_1,\cdots,m_r=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{r}\xi_j^{m_j}\prod_{i=1}^{d}(x_i+\sum_{j=1}^{r}a_{i,j}m_j)^{-s_i}$$

と定義する (但し $\boldsymbol{s}=(s_1,\ldots,s_d)\in\mathbb{C}^{\oplus d}$)。変数を $\boldsymbol{s}=(s_1,\cdots,s_d)=(s,\cdots,s)$ に制限したとき、$\zeta(\boldsymbol{s},A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ を単に $\zeta(s,A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ と書くことにする。

以下、$\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, c 等の記号は 問題 23-6. の通りとする。$(d,r)=(2,1)$ 及び $c_1=c_2=c$ のときにデータ

$$A_1=(1,1),\qquad \boldsymbol{x}_z=\begin{pmatrix}z^{(1)}\\ z^{(2)}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\xi}_1^{\mu}=(\xi_1^{\mu})$$

$$A_{1,\varepsilon}=\begin{pmatrix}1&\varepsilon^{(1)}\\1&\varepsilon^{(2)}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_z=\begin{pmatrix}z^{(1)}\\ z^{(2)}\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\xi}_{1,\varepsilon}^{\mu}=\begin{pmatrix}\xi_1^{\mu}\\ \xi_{\varepsilon}^{\mu}\end{pmatrix}$$

に対して錐のゼータ関数の定義を適用することによって、($\mathfrak{c}$ で変形した) 部分ゼータ関数 $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}^{-1},\mathfrak{c},s)$ が

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}^{-1},\mathfrak{c},s)=N\mathfrak{b}^{s}\sum_{\mu=1}^{c-1}\sum_{z\in P_1\cap F_{\mathfrak{f}}^{+}\cap\mathfrak{b}}\xi_z^{\mu}\zeta(s,A_1,\boldsymbol{x}_z,\boldsymbol{\xi}_1^{\mu})+N\mathfrak{b}^{s}\sum_{\mu=0}^{c-1}\sum_{z\in P_{1,\varepsilon}\cap F_{\mathfrak{f}}^{+}\cap\mathfrak{b}}\xi_z^{\mu}\zeta(s,A_{1,\varepsilon},\boldsymbol{x}_z,\boldsymbol{\xi}_{1,\varepsilon}^{\mu})$$

と書き換えられることを 問題 23-6. の結果を用いて示しなさい。

※ 本設問の結果より、部分ゼータ関数 (の $\mathfrak{c}$ による変形) $\zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}^{-1},\mathfrak{c},s)$ を p 進補間するためには **錐のゼータ関数 $\zeta(s,A,x,\xi)$ が p 進補間出来れば良い** ことが直ちに観察出来ます。したがって、以降の設問では主役が徐々に錐のゼータ関数 $\zeta(s,A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ に移ってゆきます。

問題 23-8. (錐のゼータ関数の積分表示と解析接続)

C_δ を複素平面 $\mathbb{C}$ に於ける (半径 δ の) ハンケルの周回積分路とする (問題 17-4. 参照)。このとき、錐のゼータ関数 $\zeta(\boldsymbol{s},A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ の積分表示

$$\zeta(\boldsymbol{s},A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=\prod_{i=1}^{d}\frac{1}{\Gamma(s_i)}\frac{1}{\exp(2\pi\sqrt{-1}s_i-1)}\times\int_{C_\delta}\cdots\int_{C_\delta}\frac{\exp(-\sum_{i=1}^{d}x_it_i)}{\prod_{j=1}^{r}(1-\xi_j\exp(-\sum_{i=1}^{d}a_{i,j}t_i))}\left(\prod_{i=1}^{d}t_i^{s_i-1}\right)dt_1\dots dt_d$$

を導き出しなさい。特にこの積分表示から、錐のゼータ関数は ($\mathbb{C}^{\oplus d}$ の適切な領域まで) 有理型に解析接続されることが従います。

※ $\zeta(\boldsymbol{s},A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ は多変数関数なので、積分表示も随分と厳つめらしい形をしており一瞬ぎょっとしてしまいますが、よくよく右辺を見てみるとハンケル周回積分路での「d 回逐次積分」に過ぎませんから、1 変数ずつ冷静に対処していけば殆ど 問題 17-4. と同様の手順で証明出来てしまいます。何事も見た目の繁雑さに惑わされてはいけない、と言う教訓を身をもって教えてくれる問題ですね。

問題 23-9. (錐のゼータ関数の特殊値と多重ベルヌーイ数)

($\boldsymbol{\xi}$ で捻った) 多重ベルヌーイ数 $B_{k_1,\dots,k_d}(A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ を、母関数

$$\frac{\exp(\sum_{i=1}^{d}x_it_i)}{\prod_{j=1}^{r}(1-\xi_j\exp(\sum_{i=1}^{d}a_{i,j}t_i))}=\sum_{k_1,\dots,k_d=0}^{\infty}B_{k_1,\dots,k_d}(A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})\frac{t_1^{k_1}\cdots t_d^{k_d}}{k_1!\cdots k_d!}$$

のテイラー展開に於ける $t_1^{k_1}\cdots t_d^{k_d}$ の係数を $k_1!\cdots k_d!$ で割ったものとして定義する。このとき、$\boldsymbol{k}=(k_1,\dots,k_d)$ (但し $k_1,\dots,k_d$ は自然数) に対して

$$\zeta(-\boldsymbol{k},A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})=B_{k_1,\cdots,k_d}(A,\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$$

が成り立つことを 問題 23-8. の結果を踏まえて証明しなさい。

※ 本問は、$\zeta(\boldsymbol{s}, A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ の積分表示さえ得られてしまえば (多変数) テイラー展開の練習問題の様な簡単な問題ですが、**錐のゼータ関数の特殊値が比較的簡単な母関数のテイラー展開の係数として表される** という点は特筆に値します。岩澤のスティッケルベルガー構成 (第 19 節参照) が「ゼータ関数の特殊値がベルヌーイ数と言う比較的分かりやすい数で具体的に書き下せる」ために (q 展開原理の様な大道具を持ち出さなくても) 巧く機能したことを鑑みれば、「**特殊値が「ベルヌーイ数」で書ける錐のゼータ関数は p 進補間しやすいのではないか**?」と考えるのは非常に自然な発想です。実際，この特殊値の多重ベルヌーイ数表示を効果的に用いることで錐のゼータ関数の p 進補間は実行されるのです。

■ 24. p 進測度論入門 —マーラーの定理とアミース変換

関数の p 進補間を考察する際に便利な概念である p **進測度** *p-adic measures* について簡単に概観しよう。

問題 24-1. ($\mathbb{Z}_p$ 上の p 進連続関数)

p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上定義された $\mathbb{C}_p$-値連続関数全体のなす $\mathbb{C}_p$-線形空間 $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ に

$$\|\cdot\| : C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \ ; \ f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} |f(x)|_p$$

によりノルムを定める。

(1) $\|\cdot\|$ が実際にノルムとなっていることを確認し、$C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ はノルム $\|\cdot\|$ に関して ($\mathbb{C}_p$ 上の) バナッハ空間になることを示しなさい。

(2) $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ の元 f と自然数 n に対して $\rho_n(f)$ を

$$\rho_n(f) = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{Z}_p \\ |x-y|_p \leq p^{-n}}} |f(x) - f(y)|_p$$

で定めるとき、$\lim_{n \to \infty} \rho_n(f) = 0$ が成り立つことを示しなさい。

問題 24-2. (二項係数関数)

$\mathbb{Z}_p$ 上の二項係数関数 $\dbinom{-}{n} \colon \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ を

$$\binom{x}{n} = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} & n \geq 1 \text{ のとき}, \\ 1 & n = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。$\dbinom{-}{n}$ は $\mathbb{Z}_p$-値連続関数 (即ち $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_p)$ の元) で、$\left\| \dbinom{-}{n} \right\| = 1$ を満たすことを示しなさい。[ヒント: $\mathbb{N}$ は p 進付値に関して $\mathbb{Z}_p$ の中で稠密であることを用いる]

問題 24-3. (ニュートン級数)

K を $\mathbb{Q}$ の体拡大とし、K の部分環 A を任意にとる。$f \colon N \to A$ を **自然数** $\mathbb{N}$ **上定義された** A 値関数とする。

差分作用素 *difference operator* Δ を $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ で定め、f の **第** n **ニュートン係数** *n-th Newton coefficient* を $a_n(f) = (\Delta^n f)(0)$ で定める。

(1) 等式

$$(\Delta^n f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(x+n-k), \qquad a_n(f) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k)$$

が成り立つことを確認しなさい。

(2) (1) の計算結果も用いて、関数としての等式 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) \binom{x}{n}$ が成り立つことを証明しなさい。右辺を $f(x)$ の **ニュートン級数** *Newton series* と呼びます[*27]。

[ヒント: $n \geq 1$ のとき、$\sum_{j=0}^{n} (-1)^n \binom{n}{j} = (1-1)^n = 0$ となることに注意しなさい]

(3) (余力があれば) $f\colon \mathbb{N} \to A$ のニュートン係数 $a_n(f)$ が一意に定まること (即ち f が $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}$ と展開出来たとすると $c_n = a_n(f)$ となること) を示しなさい。

[ヒント: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \binom{x}{n} = 0$ を満たす非自明な族 $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ が存在すると仮定したとき、$b_n \neq 0$ となる最小の n_0 を考えて矛盾を導き出しなさい]

問題 24-4. (マーラー係数の極限値)

$\mathbb{C}_p$ 値 **連続** 関数 (即ち $C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ の元) f に対し、問題 24-3. と全く同様にして差分作用素 $\Delta\colon C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p) \to C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ 及び $a_n(f) = (\Delta^n f)(0)$ を定める (本設問の設定下では、$a_n(f)$ を **第 n マーラー係数** *n-th Mahler coefficient* と呼ぶ)。

(1) 整数 $0 \leq j \leq p^n$ に対して $\left| \binom{p^n}{j} \right| = p^{-(n-v_p(j))}$ が成り立つことを示しなさい。

(2) 非負整数 n 及び p 進整数 x に対して $|(\Delta^{p^n} f)(x)| \leq \max_{0 \leq s \leq n} p^{-(n-s)} \rho_s(f)$ が成り立つことを示しなさい。

(3) (2) の結果を用いて、関数列 $\{\Delta^{p^n} f\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ が ($C(\mathbb{Z}_p, \mathbb{C}_p)$ の位相に関して) 0 に一様収束することを示しなさい。この結果から、特に $\lim_{n \to \infty} |a_n(f)|_p = 0$ が従います。[ヒント: $\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} = (1-1)^n = 0$ より

$$(\Delta^n f)(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} (f(x+j) - f(x))$$

が成り立つことに注意しよう]

[*27] 本文では x は自然数としているので、ニュートン級数表示に於いて $x < n$ ならば $\binom{x}{n} = 0$ となってしまいます。したがって、各 x に対してニュートン級数の値は実質的に有限和となるため、収束性の問題は発生しません。

問題 24-5. (マーラーの定理)

次の定理を以下の手順に従って証明しなさい。

マーラーの定理 (Kurt Mahler)
関数 $f:\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p$ が連続であるための必要十分条件は、$\mathbb{C}_p$ の元の族 $\{a_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ で $\lim_{n\to\infty}|a_n(f)|_p=0$ かつ任意の p 進整数 x に対して

$$(\clubsuit):\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)\binom{x}{n}$$

を満たすものが一意に存在することである。

また、マーラーの定理の主張の **多変数化** (即ち関数 $f\colon \mathbb{Z}_p^{\oplus r}\to\mathbb{C}_p$ に関する主張への拡張) を試みなさい。

Step 1. 条件の十分性を証明しなさい。[ヒント: $C(\mathbb{Z}_p,\mathbb{C}_p)$ はバナッハ空間]

Step 2. 問題 24-3. 及び 問題 24-4. の結果から、f が連続であるならば、マーラー係数 $\{a_n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ が $\lim_{n\to\infty}|a_n(f)|_p=0$ 及び ($\clubsuit$) を満たすことを示しなさい。

Step 3. マーラー係数の一意性を 問題 24-3. (4) に帰着させることで導き出し、主張の残りの部分を証明しなさい。

問題 24-6. (有界 p 進測度)

r を自然数とする。$\mathbb{C}_p$-バナッハ空間 $C(\mathbb{Z}_p^r,\mathbb{C}_p)$ (問題 24-1. (1) と全く同様にしてノルム $\|\cdot\|$ を考える) 上の $\mathbb{C}_p$-値 **連続** 線形汎関数 $\mu\colon C(\mathbb{Z}_p^r,\mathbb{C}_p)\to\mathbb{C}_p$ を $\mathbb{Z}_p^r$ 上の ($\mathbb{C}_p$-値有界) p **進測度** と呼ぶ。$\mathbb{Z}_p^r$ 上の p 進測度の成す集合を $\mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p^r,\mathbb{C}_p)$ で表すことにしよう。

このとき以下の主張を示しなさい;

『$\mathbb{C}_p$-線形汎関数 $\mu: C(\mathbb{Z}_p^r,\mathbb{C}_p)\to\mathbb{C}_p$ が $\mathbb{Z}_p^r$ 上の $\mathbb{C}_p$-値測度であるための必要十分条件は、μ が **有界線形汎関数** であること、即ち或る正の実数 $M>0$ が存在して、任意の $C(\mathbb{Z}_p^r,\mathbb{C}_p)$ の元 f に対して $|\mu(f)|_p\leq M\|f\|$ を満たすことである』

※ 位相線形空間論 (または関数解析) の一般論からも従う主張ですが、今の状況では考えている位相が p 進位相であることも手伝って、直接示すのもさほど難しくありません。

問題 24-7. (アミース変換)

$\mathbb{C}_p[[T_1,\ldots,T_r]]^{\mathrm{bdd}}$ を $\mathbb{C}_p$ 上の r 変数形式的冪級数で係数が有界なもの全体の集合とする。即ち $\mathbb{C}_p[[T_1,\ldots,T_d]]^{\mathrm{bdd}}$ の元 f は、

$$f=\sum_{m_1,\ldots,m_d=0}^{\infty}a_{m_1,\ldots,m_d}(f)T_1^{m_1}\cdots T_d^{m_d},\qquad a_{m_1,\ldots,m_d}(f)\in\mathbb{C}_p$$

という d 変数形式的冪級数で $\sup_{(m_1,\ldots,m_d)\in\mathbb{Z}_{\geq 0}^{\oplus r}}|a_{m_1,\ldots,m_d}(f)|_p<+\infty$ を満たすものである。

さて、x を p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の元とするとき、$\mathbb{Z}_p[[T]]$ の元 $(1+T)^x$ を「形式的な二項展開」

$$(1+T)^x=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{x}{n}T^n$$

で定める。また、$\mathbb{Z}_p^r$ 上の p 進測度 μ 及び $C(\mathbb{Z}_p^r, \mathbb{C}_p)$ の元 f に対して、$\mu(f)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p^r} f\, d\mu$ と書くことにする。このとき、$\mathbb{C}_p$-線形写像

$$\mathcal{A} : \mathrm{Meas}(\mathbb{Z}_p^r, \mathbb{C}_p) \to \mathbb{C}_p[[T_1, \cdots, T_r]]^{\mathrm{bdd}} \ ; \ \mu \mapsto \int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{i=1}^{r} (1+T_i)^{x_i} d\mu(x_1, \ldots, x_r)$$

が同型を導くことを、(多変数の場合の) マーラーの定理 (問題 24-5.) を用いて示しなさい。同型 $\mathcal{A}$ を **アミース変換** *Amice transformation* と呼びます。

※ $\mathcal{O}$ を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大の整数環とするとき、1 変数形式的冪級数環 $\mathcal{O}[[T]]$ の元を $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}$-値 p 進測度と見做すことが出来ることは良く知られています (例えば Mazur, Swinnerton-Dyer の論文に詳しく書かれています)。本設問は、この良く知られた事実の「多変数版」も同様に成り立つことを確認する問題です。

■ 25. 錐の p 進ゼータ関数と p 進部分ゼータ関数

以上の準備の下で、いよいよ錐のゼータ関数 (及び部分ゼータ関数) を p 進補間していこう。

問題 25-1. (p 進測度の構成の準備)

$\mathbb{C}_p$ の元 z (但し $z \neq 0$) に対し、$\mathbb{C}_p$ 係数の形式的冪級数 $A_z(T)$ を

$$A_z(T) = \frac{1}{1 - z(T+1)} = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{z}{1-z}T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^{n+1}} T^n$$

で定める。このとき、$A_z(T)$ が $\mathbb{C}_p[[T]]^{\mathrm{bdd}}$ の元となることは $|z-1|_p \geq 1$ が成り立つことと同値であることを示しなさい。このことを用いて、p と素な自然数 c (但し $c \geq 2$) 及び 1 の原始 c 乗根 ξ に対し、$A_\xi(T)$ が $\mathbb{C}_p[[T]]^{\mathrm{bdd}}$ の元となることを示しなさい。

問題 25-2. (p 進測度 $\mu_{\xi_1, \ldots, \xi_r}$)

c を 2 以上の自然数で p と互いに素なものとし、$\xi_1, \cdots, \xi_r$ を 1 の原始 c 乗根とする。アミース変換によって $\prod_{j=1}^{r} A_{\xi_j}(T_j)$ に対応する $\mathbb{Z}_p^r$ 上の p 進測度を $\mu_{\xi_1, \ldots, \xi_r}$ とおこう。等式

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{d} x_i t_i\right) \cdot \prod_{j=1}^{r} \exp\left(\sum_{i=1}^{d} a_{i,j} t_i - 1\right) = \sum_{k_1, \ldots, k_d = 0}^{\infty} A_{k_1, \ldots, k_d}(\boldsymbol{x}) \frac{t_1^{k_1} \cdots t_d^{k_d}}{k_1! \cdots k_d!}$$

によって $\mathbb{C}_p$ の元 $A_{k_1, \ldots, k_d}(\boldsymbol{x})$ を定めるとき、

$$A_{k_1, \ldots, k_d}(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{i=1}^{d} \left(x_i + \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} t_j\right)^{k_i} \mu_{\xi_1, \ldots, \xi_r}(t_1, \ldots, t_r)$$

が成り立つことを確認しなさい。

問題 25-3. (錐のゼータ関数の特殊値の p 進積分表示)

以下 x_i 及び $a_{i,j}$ (但し $1 \le i \le d,\ 1 \le j \le r$) は $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}_{>0}$ の元であると仮定する。このとき任意の自然数 $k_1, \ldots, k_d$ に対して

$$\zeta(-\boldsymbol{k}, A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{i=1}^{d} \left(x_i + \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} t_j \right)^{k_i} \mu_{\xi_1, \ldots, \xi_r}(t_1, \ldots, t_r)$$

が成り立つことを示しなさい。

問題 25-4. (錐の p 進ゼータ関数)

任意の $1 \le i \le d$ に対して、$|x_i|_p = 1$ 及び $\max_{1 \le j \le r}\{|a_{i,j}|_p\} < 1$ が成り立つと仮定する。このとき p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の任意の元 t_j に対して $|x_i + \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} t_j|_p = 1$ が成り立つ (即ち $x_i + \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} t_j$ は p 進単数であるということ; 各自確認しなさい)。以上の設定の下で (d 変数の) **錐の p 進ゼータ関数** を

$$\zeta_p(\boldsymbol{s}, A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{Z}_p^r} \prod_{i=1}^{d} \langle x_i + \sum_{j=1}^{r} a_{i,j} t_j \rangle^{-s_i} \mu_{\xi_1, \cdots, \xi_r}(t_1, \ldots, t_r)$$

で定義する。但し、 $\mathbb{C}_p$ の単数群の元 a に対して $\langle a \rangle = a\omega_p(a)^{-1}$ は岩澤の括弧記号であり、定義から $\mathbb{C}_p$ の主単数群の元である。

錐の p 進ゼータ関数 $\zeta_p(\boldsymbol{s}, A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ が $\mathbb{Z}_p^r$ 上の連続関数であって、任意の自然数 $k_1, \ldots, k_d$ に対して補間公式 $\zeta_p(-\boldsymbol{k}, A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) = B_{k_1, \ldots, k_d}(A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ を満たすことを示しなさい。

以下 $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_r) = (s, \ldots, s)$ の時は $\zeta_p(\boldsymbol{s}, A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ のことを単に $\zeta_p(s, A, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi})$ と書くことにする。

問題 25-5. (総実代数体の部分 p 進ゼータ関数)

F の整イデアル $\mathfrak{c}$ を 問題 23-5. の条件 (C1), (C2) を満たす様な $\underline{P_{\mathfrak{f}}^{+}\ \textbf{の元}}$ となる様に選び、$c = \sharp(\mathfrak{r}_F/\mathfrak{c})$ とおく。

(1) 問題 23-4. の結果を用いて、部分ゼータ関数 $\zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma, s)$ が $(c^{1-s} - 1)^{-1} \zeta_{\mathfrak{f}}(\mathfrak{b}^{-1}, \mathfrak{c}, s)$ と書き直されることを確認しなさい。

(2) p 進部分ゼータ関数 $\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\sigma, s)$ を

$$\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\sigma, s) = \frac{\langle N\mathfrak{b} \rangle^{s}}{c^{1-s} - 1} \left[\sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{z \in P_1 \cap F_{\mathfrak{f}}^{+} \cap \mathfrak{b}} \xi_z^{\mu} \zeta_p(s, A_1, \boldsymbol{x}_z, \boldsymbol{\xi}_1^{\mu}) + \sum_{\mu=1}^{c-1} \sum_{z \in P_{1,\varepsilon} \cap F_{\mathfrak{f}}^{+} \cap \mathfrak{b}} \xi_z^{\mu} \zeta_p(s, A_{1,\varepsilon}, \boldsymbol{x}_z, \boldsymbol{\xi}_{1,\varepsilon}^{\mu}) \right]$$

と定義するとき、任意の負の整数 n で $n \equiv 0 \mod [F(\mu_{2p})\colon F]$ を満たすものに対して $\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\sigma, s)$ が補間公式 $\zeta_{p,\mathfrak{f}}(\sigma, n) = \zeta_{\mathfrak{f}}(\sigma, n)$ を満たすことを示しなさい。

参考文献

[数論 I] 加藤和也，黒川信重，斎藤毅 著，**数論 I — Fermat の夢と類体論**，岩波書店 (2005).

[数論 II] 黒川信重，栗原将人，斎藤毅 著，**数論 II — 保型形式と岩澤理論**，岩波書店 (2005).

[足立三宅 98] 足立恒雄，三宅克哉著，**類体論講義**，日評数学選書，日本評論社 (1998).

[桂 05] 桂利行著，**代数学III 体とガロア理論**, 東京大学出版会 (2005).

[斎藤 97] 斎藤秀司著，**整数論**，共立講座 21 世紀の数学 第 20 巻，共立出版 (1997).

[藤崎 91] 藤崎原二郎著，**体とガロア理論**，岩波基礎数学選書，岩波書店 (1991).

[森田 99] 森田康夫著，**整数論**，基礎数学 13, 東京大学出版会 (1999).

[SS03] 尾崎学，田谷久雄，八森祥隆 編，2003 **年度 (第** 11 **回) 整数論サマースクール 『岩澤理論』 報告集** (2003).

[SS09] 落合理，千田雅隆，山内卓也 編，2009 **年度 (第** 17 **回) 整数論サマースクール 『**ℓ **進ガロア表現とガロア変形の整数論』 報告集** (2009).

[SS12] 青木宏樹，加塩朋和，山本修司 編，2012 **年度 (第** 20 **回) 整数論サマースクール 『**Stark **予想』 報告集** (2012).

[AM69] Michael Francis Atiyah and Ian Grand Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley (1969).

[Bass68] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, Inc., New York/Amsterdam (1968).

[Bou65] Nicolas Bourbaki, *Éléments de Mathématique* : *Algèbre Commutative. Chapitre 7* : *Diviseurs*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. **1314**, Hermann, Paris (1965).

[CaFr86] John William Scott Cassels and Albrecht Fröhlich edt, *Algebraic Number Theory*, A Nato Advanced Study Institute W, Academic Press (1986).

[CFKSV05] John Henry Coates, Takako Fukaya, Kazuya Kato, Ramdorai Sujatha and Otmar Venjakob, *The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **101**, 163–208 (2005).

[CR81] Charles Whittlesey Curtis and Irving Reiner, *Methods of Representation Theory: With applications to finite groups and orders*, Volume I, Wiley, New York (1981).

[CR87] Charles Whittlesey Curtis and Irving Reiner, *Methods of Representation Theory: With applications to finite groups and orders*, Volume II, Wiley, New York (1987).

[CS06] John Henry Coates and Ramdorai Sujatha, *Cyclotomic fields and zeta values*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin (2006).

[DdSMS91] John Douglas Dixon, Marcus Peter Francis du Sautoy, Avinoam Mann and Daniel Segal, *Analytic pro-p groups* (2nd edition), London Math. Soc. Lecture Note **157**, Cambridge Univ. Press (1991).

[Ha97] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Math, **52**, Springer-Verlag (1997).

[Hi93] Haruzo Hida, *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society, Student Book, **26** (1993).

[Iw72] Kenkichi Iwasawa, *Lectures on p-adic L-functions*, Ann. of Math. Studies, Princeton University Press (1972).

[Ko84] Neal Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta Functions* (2nd edition), Springer-Verlag NewYork (1984).

[La90] Serge Lang, *Cyclotomic Fields* **I** *and* **II** (combined second edition) with appendix by Karl Rubin, Springer-Verlag (1990).

[Laz65] Michel Lazard, *Groupes analytiques p-adiques*, Inst. Hautes Études Scientifiques, Publ. Math., **26**, 389–603 (1965).

[LM87a] Alexander Lubotsky and Avinoam Mann, *Powerful p-groups* **I**: *finite groups*, J. Algebra, **105**, 484–505 (1987).

[LM87b] Alexander Lubotsky and Avinoam Mann, *Powerful p-groups* **II**: *p-adic analytic groups*, J. Algebra, **105**, 506–515 (1987).

[Mi71] John Willard Milnor, *Introduction to Algebraic K-theory*, Annals of Mathematics Studies, Princeton University Press, Princeton (1971).

[Neu92] Jürgen Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer-Verlag (1992).
(邦訳: 足立恒雄監修 梅垣敦紀訳『代数的整数論』丸善出版)

[NSW00] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt and Kay Wingberg, *Cohomology of Number Fields*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **323**, Springer-Verlag Berlin (2000).

[Ru00] Karl Rubin, *Euler systems*, Annals of Mathematics Studies, vol. **147**, Princeton University Press (2000).

[Schnei11] Peter Schneider, *p-Adic Lie Groups*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **344**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011).

[Se67] Jean-Pierre Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann (1967).
(英訳: Translated by Leonard L. Scott, *Linear representations of finite groups*, Graduate Texts in Math., **42**, Springer-Verlag)

[Se68] Jean-Pierre Serre, *Corps locaux*, Hermann (1968).
(英訳: Translated by Marvin Jay Greenberg, *Local Fields*, Springer-Verlag)

[Se92] Jean-Pierre Serre, *Lie Algebras and Lie Groups* (2nd edition), Lecture Notes in Math., Soringer-Verlag Berlin Heidelberg (1992).

[Se94] Jean-Pierre Serre, *Cohomologie Galoisienne* (Cinquième édition), Lecture Notes in Math., **5**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1994).
(英訳: Translated by Patrick Ion, *Galois Cohomology*, Springer Monographs in Math., Springer-Verlag)

[Sw68] Richard Gordon Swan, *Algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math., **76**, Springer-Verlag Berlin (1968).

[Wa97] Lawrence Clinton Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields* (2nd edition), Springer-Verlag (1997).

※ 参考文献の引用記号はウェブページに掲載しているものと合わせています。