非可換岩澤理論について

深 谷 太香子

代数体の ideal 類群と zeta 関数は各々数論において非常に重要な研究対象である．しかしながら ideal 類群は代数的，zeta 関数は解析的な存在で，両者はかけ離れており，その定義からは相互に関係があることをうかがい知ることはできない．岩澤健吉氏により創始された岩澤理論では，'代数体の p 進 Galois 拡大体の塔について，Galois 群の作用も込めて統一的に' 両者の関係を p 進的に研究する．この岩澤理論における代数側と解析側の関係は，その後の発展の中で，楕円曲線や motive の Selmer 群 (代数側) と楕円曲線や motive 各々の zeta 関数 (解析側) の間の p 進的な関係について (Galois 群の作用も込めて) の研究へと一般化されている．これまでは主に円分拡大の場合のように，Galois 群が p 進整数の加法群 $\boldsymbol{Z}_p$ や乗法群 $\boldsymbol{Z}_p^\times$ に同型なもの等，可換群である場合を考察する研究が行われてきた．非可換岩澤理論とは，この Galois 群を可換とは限らない p 進群の場合に一般化して考察を行う理論である．まずは基本となる Galois 群が可換な場合の '可換岩澤理論' について簡単に振り返ってから，近年進展している非可換岩澤理論について述べていく．岩澤理論と呼ばれる研究の中には，代数側 (ideal 類群等) の性質を詳細に調べることに焦点のあるものも多くある．(実際，岩澤理論は岩澤氏による，代数側の対象である ideal 類群自体の研究に起りがある．) しかしここでは代数側と解析側の関係――これが岩澤主予想である――を中心に述べさせて頂く．図式で言えば次の通りである：p 進 Galois 拡大 F_∞/F に対し，

$\boxed{\text{代数側}}$	p 進的な関係	$\boxed{\text{解析側}}$
F_∞ の ideal 類群	$\Longleftrightarrow$	Galois 拡大 F_∞/F に伴う p 進 zeta 関数,
楕円曲線等の F_∞ 上の Selmer 群	$\Longleftrightarrow$	楕円曲線等の F_∞/F に伴う p 進 zeta 関数.

本稿作成時に，御意見，御指導を下さいました栗原将人先生に深く感謝申し上げます．

本稿では常に p は素数を表すものとする．そして簡単のため $p \neq 2$ と仮定する．また諸先生に対し失礼ではあるが本文中は敬称を略させて頂く．

1　可換な岩澤理論

1.1　ideal 類群に対する岩澤主予想

有限次代数体 (有理数体 $\boldsymbol{Q}$ の有限次拡大体) F の ideal 類群 $\mathrm{Cl}(F)$ とは

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(F) &= \frac{F\text{ の }0\text{ でない分数 ideal たちのなす乗法群}}{\{(a) = aO_F \mid a \in F^\times\}} \\ &= \mathrm{Coker}(F^\times \to \bigoplus_v \boldsymbol{Z}\ ;\ a \mapsto (\mathrm{ord}_v(a))_v)\end{aligned}$$

(O_F は F の整数環，v は F の有限素点全体を走り，ord_v は v による正規化された加法付値) により定義される可換群であり，有限群となることが知られている．定義より $\mathrm{Cl}(F) = 1 \Leftrightarrow O_F$ が単項 ideal

整域，であり，$\mathrm{Cl}(F)$ は単項 ideal からどのくらい離れた ideal が F に存在するか，つまり F で素因数分解ができない度合いを表す非常に重要な群である．この ideal 類群が ‘ideal 類群に対する岩澤主予想’ において考察する代数側の対象である．$\mathrm{Cl}(F)$ は代数体 F によって複雑に異なり，F と $\mathrm{Cl}(F)$ の対応の様子に規則を見出すことは困難である．後に行う一般化についての説明に備え，$\mathrm{Cl}(F)$ の位数が p ベキである元全体からなる部分群 A_F を，Galois cohomology を用いて表しておく：

$$A_F = \mathrm{Ker}\ (\frac{H^1(F,\mu_{p^\infty})}{O_F^\times \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p} \to \prod_v \frac{H^1(F_v,\mu_{p^\infty})}{O_{F_v}^\times \otimes_{\boldsymbol{Z}} \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p}). \tag{1.1}$$

但しここで μ_{p^∞} は F の代数閉包に含まれる 1 の p ベキ根たち全体のなす乗法群，v は F の有限素点全体を走り，F_v は F の v による完備化である．

ここで岩澤 [18] に従い，岩澤主予想の思想の背後にあると思われる関数体の理論との類似について述べておく．有限次代数体と一変数関数体，特に有限体上の一変数関数体の間には多くの類似が存在し，その類似を辿ることにより様々な理論が展開されてきたことは広く知られている．体 k 上の一変数関数体 K の因子類群 $\mathrm{Cl}(K)$ は，代数体に対しての ideal 類群と同様にして，K に対し定義される可換群である $(\mathrm{Coker}(K^\times \to \bigoplus_w \boldsymbol{Z}\ ;\ a \mapsto (\mathrm{ord}_w(a))_w)$, w は K の素点全体を走る)．$\mathrm{Cl}^0(K)$ を $\mathrm{Cl}(K)$ の次数 0 の因子類たち全体のなす部分群とすると，k が有限体であるとき，$\mathrm{Cl}^0(K)$ は有限群となり K 毎に微妙に変化する．これは代数体 F の ideal 類群 $\mathrm{Cl}(F)$ が有限群で，F 毎に微妙に変化することと類似している．一方，k が p と異なる標数を持つ代数閉体であるとき，$\mathrm{Cl}^0(K)$ の位数 p ベキの元全体からなる部分群は，K を関数体とする完備非特異代数曲線の種数を g とおくと，$(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)^{2g}$ に同型となり非常に簡明な形をしている．更に k が標数 $\neq p$ の有限体であるとき，関数体 K の因子類群と K の zeta 関数の関係が次のように与えられる．まず $K \otimes_k \overline{k}$ ($\overline{k}$ は k の代数閉包) には Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ が作用し，従って $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ は $\mathrm{Cl}^0(K \otimes_k \overline{k})$ やその p ベキ部分群 $\simeq (\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)^{2g}$ に作用する．$\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ の位相的生成元を与える Frobenius 写像 ($\sharp k$ 乗写像) は $\mathrm{Cl}^0(K \otimes_k \overline{k})$ の p ベキ部分群への自己同型写像をもたらす．これを $\boldsymbol{Z}_p$ 上の $2g$ 次の正方行列で表すと，その固有多項式が K の zeta 関数 (の主要部) となることを Weil ([47]) が証明した．このように K の因子類群と zeta 関数が，Galois 群の因子類群への作用を介して結びついている．ここで $\mathrm{Cl}^0(K)$ の形の簡明さや zeta 関数との関わりにおいて鍵となるのは ‘係数体の代数閉包を考える’ ことであり，係数体が有限体であるとき，この代数閉包は，1 のベキ根全てを添加することにより得られる．

岩澤理論では素数 p を固定して議論をする．固定した p について，有限体上の一変数関数体の場合に係数体の代数閉包をとることの類似として，代数体 F に 1 の p ベキ根全てを添加する．すると，岩澤 [18] にあるように，様々なことが見えてくる．岩澤はまず $\varinjlim_n A_{F(\mu_{p^n})}$ (μ_{p^n} は 1 の p^n 乗根全体のなす群) がわかりやすい形となることを示した ([17])．この結果を得る上で $\varinjlim_n A_{F(\mu_{p^n})}$ に Galois 群 $G_{\mu_{p^\infty}} = \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$ $(F(\mu_{p^\infty}) = \cup_n F(\mu_{p^n}))$ が作用しているということが非常に重要であり，それにより途中の体における $A_{F(\mu_{p^n})}$ ($n >> 0$ のとき) をほぼ知ることもできるのである (これらの結果に伴って μ, λ 等の ‘岩澤不変量’ が定義される．これについては堀江 [15] 等にある)．

更に ideal 類群 (代数側) と zeta 関数 (解析側) の関係について，次に述べる岩澤主予想が生まれた ([19])．岩澤主予想では $\varinjlim_n A_{F(\mu_{p^n})}$ の Pontrjagin 双対：

$$\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty})) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varinjlim_n A_{F(\mu_{p^n})},\ (\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)(1)),$$

やその商 (下の (1.2)) を代数的対象として考察する．ここに $(\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)(1)$ は $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ の Tate ひねりである．次に岩澤主予想の定式化に必要な $\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))$ に対応する不変量について述べる．$\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))$ に $G_{\mu_{p^\infty}}$ が連続に作用することより，$\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))$ は $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]] = \varprojlim_n \boldsymbol{Z}_p[\mathrm{Gal}(F(\mu_{p^n})/F)]$ 上の加群とみなすことができる．岩澤は $\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))$ が $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]$ 上の有限生成ねじれ加群であることを示した ([20])．(上述の $\varinjlim_n A_{F(\mu_{p^n})}$ がわかりやすい形になるという結果はこの $\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))$ についての研究より得られる．) ここで $\Gamma = \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F(\mu_p))$ とおくと $\Gamma \simeq \boldsymbol{Z}_p$ であることから同型 $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \boldsymbol{Z}_p[[T]]$ が得られる．従って $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]$ は一変数形式ベキ級数環 $\boldsymbol{Z}_p[[T]]$ の有限個 ($[F(\mu_p):F]$ 個) の直積と同型になる．R を $\boldsymbol{Z}_p[[T]]$ の有限個の直積に同型な環とするとき，R 上有限生成なねじれ加群 M は，ある $\oplus_{i=1}^m R/(r_i)$ (r_i は R の非零因子，$m < \infty$) と，R 加群として，有限の核，余核の差を除いて同型であることが知られている．この事実を用いて，加群 M の特性 ideal が R の ideal として，$\mathrm{Char}_R(M) = (\prod_{i=1}^m r_i)$ と定義される．$\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+ = \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]/(\iota - 1)$ ($\iota \in G_{\mu_{p^\infty}}$ は複素共役) とすると，$\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$ も $\boldsymbol{Z}_p[[T]]$ の有限個の直積である．そこで

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+ &:= \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+ \otimes_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]} \mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty})) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varinjlim_n (A_{F(\mu_{p^n})})^-, (\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)(1)),\end{aligned} \tag{1.2}$$

($(A_{F(\mu_{p^n})})^-$ は $\iota \in G_{\mu_{p^\infty}}$ が -1 倍で作用する元全体からなる部分群) と定めると，$\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+$ は有限生成ねじれ $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$ 加群となり，$\mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+}(\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+)$ が定まる．

もう一方の解析側の存在，zeta 関数は，この p 進の世界に次のように現れる．F を総実体とすると，F の Dedekind zeta 関数や Hecke L 関数の特殊値を p 進的に補間する p 進的な解析関数 $L_{p,F}$ が，$\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$ の全商環 $Q(\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+)$ の元として存在することを，$F = \boldsymbol{Q}$ のときに久保田–Leopoldt [29] が，一般では Deligne–Ribet [8] や Cassou-Noguès [5] が示した．この $L_{p,F}$ を F の p 進 zeta 関数と呼ぶ．より正確に述べると，a を $G_{\mu_{p^\infty}}$ の元を 1 に移す環準同型 $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+ \to \boldsymbol{Z}_p$ の核を生成する元とすると，$a \cdot L_{p,F} \in \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$ が成り立ち，偶数 $r > 0$ について円分指標 κ の r 乗 $\kappa^r : G_{\mu_{p^\infty}} \to \boldsymbol{Z}_p^\times$ と有限指標 $\chi : G_{\mu_{p^\infty}} \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}((F(\mu_{p^\infty}) \cap \boldsymbol{R})/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}((F(\mu_{p^n}) \cap \boldsymbol{R})/F) \to O_M^\times$ ($[M : \boldsymbol{Q}_p] < \infty$) により導かれる写像 $\kappa^r\chi : a^{-1} \cdot \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+ \to M$ での $L_{p,F} \in a^{-1} \cdot \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$ の像 $L_{p,F}(\kappa^r\chi) \in M$ が $L_{\{(p)\}}(1-r, F(\mu_{p^n})^+/F, \chi)$ となることで $L_{p,F} \in Q(\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+)$ は特徴付けられる ($F(\mu_{p^n})^+ = F(\mu_{p^n}) \cap \boldsymbol{R}$，$L_{\{(p)\}}(s, F(\mu_{p^n})^+/F, \chi)$ は複素 Hecke L 関数から p での Euler 成分を除いて得られる関数)．

上述の ideal 類群 (代数側) と p 進 zeta 関数 (解析側) を関係づけるのが，次に述べる岩澤主予想である ([19])．

定理 1.1.1 (岩澤主予想) F を総実体とする．このとき $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$ の ideal として次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+}(\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+) = L_{p,F} \cdot \mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+}(\boldsymbol{Z}_p).$$

この岩澤主予想は，$F = \boldsymbol{Q}$ のときは Mazur–Wiles [38] により，総実体一般のときは Wiles [48] により証明された．

関数体の場合, 係数体の Galois 拡大に伴う Galois 群の位相的生成元が因子類群へ作用し, この作用を表す $\boldsymbol{Z}_p$ 上の正方行列の固有多項式として, zeta 関数が得られていた．代数体の場合も，$\varinjlim_n A_{F(\mu_{p^n})}$

に対する $\mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$ の位相的生成元の作用を $\boldsymbol{Z}_p$ 上の正方行列で表すと，この行列の固有多項式を用いて，('$\mu=0$' という条件が満たされるとき) $\mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+}(\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+)$ は表される．従って定理 1.1.1 (岩澤主予想) は，p 進 zeta 関数 $L_{p,F}$ が，Galois 群の位相的生成元の $\varinjlim_n A_{F(\mu_{p^n})}$ への作用を表す行列の固有多項式により表される，ということを示しており，不思議なことに関数体の場合に非常によく似ている．

この岩澤理論，岩澤主予想はその後様々な方向への一般化が試みられてきた．ここで多くを述べることは紙数の関係および筆者の非力によりできないが，'可換岩澤理論' における，楕円曲線への一般化について，次に振り返る．

1.2　楕円曲線の岩澤主予想

楕円曲線の岩澤理論は Mazur ([35]) により研究が始められた．楕円曲線の岩澤理論では，まず代数的な対象として，Selmer 群と呼ばれる群を考察する．有限次代数体 F と F 上定義された楕円曲線 E に対し，Selmer 群 $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ を

$$\mathrm{Sel}_p(E/F)=\mathrm{Ker}\ (H^1(F,E_{p^\infty})\to\prod_v\frac{H^1(F_v,E_{p^\infty})}{E(F_v)\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p}) \tag{1.3}$$

(E_{p^∞} は E の p ベキ分点全体からなる $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 加群，v は F の素点全体を走る) と定める．$\mathrm{Sel}_p(E/F)$ は完全系列

$$0\longrightarrow E(F)\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p\longrightarrow\mathrm{Sel}_p(E/F)\longrightarrow Ш(E/F)_{p^\infty}\longrightarrow 0$$

を満たす．ここに $Ш(E/F)_{p^\infty}$ は Tate–Shafarevich 群 (の p ベキ部分群) と呼ばれるねじれ可換群で，有限群であると予想されている．従って $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ は，E の F 有理点全体のなす有限生成可換群 $E(F)$ に $\otimes_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ したもの，に非常に近いねじれ可換群であるが，岩澤理論には $E(F)$ の方ではなく，$\mathrm{Sel}_p(E/F)$ を用いることが適している．このことは，$\mathrm{Sel}_p(E/F)$ の定義 (1.3) と ideal 類群の定義 (1.1) が類似していることからもうかがわれる．以下 $\boldsymbol{Q}$ 上で定義された楕円曲線 E で，p において good ordinary reduction を持つものを考える．楕円曲線の岩澤主予想では Selmer 群の Pontrjagin 双対：

$$\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}))=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varinjlim_n\mathrm{Sel}_p(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^n})),\ \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p) \tag{1.4}$$

を代数側の対象として考察する．$\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}))$ には $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]$ ($G_{\mu_{p^\infty}}=\mathrm{Gal}(\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty})/\boldsymbol{Q})$) が作用するが，この作用により $\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}))$ が有限生成ねじれ $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]$ 加群となることを，E が虚数乗法を持つときは Rubin が ([42])，一般の場合は加藤が示した ([24])．従って 1.1 における議論により，特性 ideal $\mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]}(\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty})))$ が定義される．

一方解析側には，$E/\boldsymbol{Q}$ が p で good ordinary reduction を持つとき，次のように特徴づけられる p 進正則関数 $L_p(E)\in\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]][1/p]$ が存在する．特徴づけは，有限指標 $\chi:G_{\mu_{p^\infty}}\to O_M^\times$ ($[M:\boldsymbol{Q}_p]<\infty$) に伴う環準同型 $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]][1/p]\to M$ による $L_p(E)\in\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]][1/p]$ の像が，楕円曲線の χ でひねられた複素 L 関数の特殊値 $L(E,\chi,1)$ を E の周期等で表される量で割る等して少し補正したものと一致する，という性質で与えられる ([36], [37])．この $L_p(E)$ を E の p 進 zeta 関数と呼ぶ．

Mazur ([35]) により与えられた，楕円曲線の場合に Selmer 群 (代数側) と p 進 zeta 関数 (解析側) を結びつける岩澤主予想は次の通りである．

予想 1.2.1 (楕円曲線の場合の岩澤主予想) $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]$ の ideal としての次の等式が成り立つ：

$$\mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]}(\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}))) = L_p(E)\cdot \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]. \tag{1.5}$$

上で $L_p(E)$ は $\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]][1/p]$ に属すると述べたが，予想 1.2.1 は $L_p(E) \in \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]$ であることをも主張しているのである．

この予想は，E が虚数乗法を持つとき，Rubin により示された ([42])．虚数乗法を持たないときは，

$$\mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]}(\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}))) \mid (L_p(E)) \tag{1.6}$$

が小さな条件の下，加藤により示されている ([24])．(1.6) の結果は岩澤主予想の等式 (1.5) の半分を示したことに相当する．残りの半分についても，Skinner–Urban により研究が進んでいるとのことである．

1.3 可換な岩澤主予想についてのまとめ

可換な岩澤理論には他にも多様な一般化の方向があり，各々について様々な結果が得られている．いずれにおいても可換な岩澤主予想は次の形で与えられるのが基本である：

$$\underset{\boxed{\text{代数側}}}{\mathrm{Char}_\Lambda(\text{考察する代数的対象})} = \underset{\boxed{\text{解析側}}}{(p\text{ 進 zeta 関数})}\cdot\Lambda$$

(Λ は考察する Galois 拡大に伴う Galois 群の (岩澤) 群環)．

非可換岩澤理論とは，1.1, 1.2 において円分 p 進拡大という可換 p 進 Galois 拡大に対して考察されてきた内容を，より一般の可換とは限らない p 進拡大に一般化して研究を行う理論である．

2 非可換化へ

1 章で述べた定理 1.1.1 や予想 1.2.1 に相当する理論を，より一般の p 進 Galois 拡大体の塔 $(F_n)_n$ で，$G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ $(F_\infty = \cup_{n\geq 1}F_n)$ が非可換の場合にも構築し研究する試みは，Coates が中心となって主に 1990 年代より始められた．群環 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ が Noether 環になる ([9], 7.25) という理由で，主に Galois 群 G が p 進 Lie 群である場合に研究がなされた．円分拡大の岩澤理論でははじめに ideal 類群についての詳細な研究が行われたが，非可換岩澤理論においても当初は主に代数側，すなわち定理 1.1.1 や予想 1.2.1 における左辺に対応する対象についての研究がなされた．以降，加群とは左加群を意味することとする．

2.1 代数側

有限次代数体 F とそのより一般の p 進 Galois 拡大 $(F_n)_n$ $([F_n : F] < \infty,\ F_1 \subset F_2 \subset \cdots)$, $F_\infty = \cup_{n\geq 1}F_n$ を考える際，1.1 や 1.2 に登場した代数側の (1.2) や (1.4) に相当する対象は自然にそれらを一般化することで定義される．詳細は後に述べるが，ideal 類群の場合は例えば F_∞/F で分岐する素点が全て p の上にあるとき，F_n の ideal 類群の p べキ部分群 A_{F_n} を用いて (1.2) と同様に $\mathfrak{X}(F_\infty) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varinjlim_n (A_{F_n(\mu_{p^n})})^-, (\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)(1))$ と定める．楕円曲線の場合も (1.4) と同様 $\mathfrak{X}(E/F_\infty) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varinjlim_n \mathrm{Sel}_p(E/F_n), \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)$ と定める．これらは $\boldsymbol{Z}_p[[G]] = \varprojlim_n \boldsymbol{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/F)]$ 加群と

しての構造も自然に持つ．しかし $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の環としての性質や $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 上の加群の構造が複雑であるために，一般の拡大 $(F_n)_n$ においては，円分拡大の場合の特性 ideal (Char) のような，岩澤理論にとり望ましい設定や不変量を各々の代数的対象に対し得ることは容易ではない．実際 1 章でみた円分拡大の場合は $F_n = F(\mu_{p^n})^+ (:= F(\mu_{p^n}) \cap \boldsymbol{R})$，や $F_n = \boldsymbol{Q}(\mu_{p^n})$ $(F = \boldsymbol{Q})$ の場合に相当するが，これらの場合 $\mathfrak{X}(F_\infty)$ や $\mathfrak{X}(E/F_\infty)$ がねじれ $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群であることと，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ が $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \boldsymbol{Z}_p[[T]]$ $(\Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/(F(\mu_p) \cap F_\infty)))$ 上加群として有限型であることを用いて，特性 ideal いう不変量を定義していた．しかし一般の p 進拡大ではこの理屈は通らない．

代数側の問題点　‘$\mathrm{Char}_{\boldsymbol{Z}_p[[G]]}(\mathfrak{X})$ に相当するもの’ が定義できない $(\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(F_\infty), \mathfrak{X}(E/F_\infty))$.
そこで様々な拡大 $(F_n)_n$ に対し，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ が Noether 環になるという理由で主に $G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が p 進 Lie 群の場合に，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ やそれ上の加群 $\mathfrak{X}(F_\infty)$, $\mathfrak{X}(E/F_\infty)$ の性質の研究や，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群としての不変量を得るための努力が行われてきた．この分野では Coates，八森，Harris，Howson，越智，Sujatha，Schneider，Venjakob 等 (alphabet 順に挙げさせて頂いた) 多くの方々による貢献がある．この方面の研究の歴史や困難については，ご自身もこの分野で貢献をしてこられた八森による優れた解説があるのでそちらをご参照頂きたい ([12])．上の代数側の問題に対する一つの解決の道筋が，以下の解析側の問題への取り組みを通して得られた．

2.2　解析側

代数側には上に述べたように，円分拡大の場合の特性 ideal に相当する不変量を定める等の困難はあるものの，$\mathfrak{X}(F_\infty)$, $\mathfrak{X}(E/F_\infty)$ は可換拡大の場合の一般化として自然に定義され，更にこれらは自然に $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群の構造を持つ．よって群環 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ を基に考えるという円分拡大の岩澤理論の枠組みを維持することはできる．しかし解析側では非可換拡大 F_∞/F に対し，円分拡大の場合の一般化として p 進 zeta 関数を考察しようにも，そもそもその関数をどこの元とみなせばよいかが明らかではないのである．例えば円分拡大の場合と同様に，p 進 zeta 関数を群環 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ やその局所化の元と捉えるには次の問題がある．まず $G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が非可換群であるとき $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ やその局所化は非可換環となるので，円分拡大の場合と同様に，複素 zeta 関数の特殊値を p 進補間する p 進解析関数を $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ やその局所化の元として定義しようとすると，それらは非可換環の元となる．しかし円分拡大の岩澤理論では，詳細は省くが，代数的対象 $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{X}'$ に対応する p 進 zeta 関数を ‘$\mathfrak{X}$ に対応する p 進 zeta 関数と $\mathfrak{X}'$ に対応する p 進 zeta 関数の積’ と定義するとつじつまが合うという事実がある．例えば楕円曲線の p 進 zeta 関数の積を考えることでより高次の abel 多様体の p 進 zeta 関数が得られる，というようなことである．当然非可換拡大に一般化しても $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{X}' = \mathfrak{X}' \oplus \mathfrak{X}$ であるが，p 進 zeta 関数どうしは掛け合わされる順番によって答えが違う，ということになるとつじつまが合わない．また p 進 zeta 関数自体は Euler 積表示を持つわけではないが，p 進 zeta 関数と特殊値を通じて関係する複素 zeta 関数は Euler 積表示を持ち，この Euler 積は勿論掛け合わせる成分の順番によらないものである．‘掛け合わせる順番によらない表示を持つ関数’ の特殊値を p 進補間する p 進 zeta 関数が，掛け合わせる順番に依存する非可換環の元であることは直感的にも不自然と感じられる．実際 p 進 zeta 関数が非可換環の元であるとすると，Euler 成分をいくつか除くということに関して，複素 zeta 関数の特殊値とそれを p 進補間する p 進 zeta 関数の関係において矛盾が生じることを理論的に説明することもできる．このように p 進 zeta 関数が，非可換環の元では困るのである．

解析側の問題点　p 進 zeta 関数がどこの元か不明 (群環 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の元とみなすと不都合あり).

この問題に対処するための参考として，1.1 の場合を振り返ってみる．この場合は $F_n = F(\mu_{p^n})^+$ $(:= F(\mu_{p^n}) \cap \boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{Z}_p[[G]] = \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$ に相当する．p 進 zeta 関数 $L_{p,F} \in Q(\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+) = Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])$ は $Q(\boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+) = Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])$ の乗法群 $Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])^\times$ の元であり，この乗法群は $Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])$ の 1 次の代数的 K 群 $K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ に一致する．環 R に対し，R の 1 次の代数的 K 群は一般には

$$K_1(R) = \varinjlim_n GL_n(R)/[GL_n(R), GL_n(R)] \qquad ([\ ,\ ]\ \text{は交換子群})$$

で定義される可換群である．$K_1(R)$ は $GL_1(R)/[GL_1(R), GL_1(R)] = R^\times/[R^\times, R^\times]$ と一致することが多く，特に R が可換半局所環の場合は $K_1(R) = R^\times$ となる (Bass [1] 等参照)．一般の拡大 G においても適当な $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の局所化をとることができるとすると，その K_1 は当然可換群であり，この K_1 の元として p 進 zeta 関数を捉えることはできないか，というアイデアが Venjakob により与えられた ([46])．そこで次にどのような局所化をとるかが問題になる．非可換環 R の場合は，任意の積閉集合に対し，それによる，可換環の場合と同様の局所化が存在するわけではなく，積閉集合 S のうち ‘Ore 条件’ と呼ばれる条件を満たすものについてのみ，局所化 $R_S = \{s^{-1}a \mid a \in R,\ s \in S\} = \{bt^{-1} \mid b \in R,\ t \in S\}$ が構成される ([34], §2)．この，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ のよい局所化を考え，K_1 群に適用する，という考え方は，p 進 Lie 拡大の場合には解析側のみならず代数側の問題に対しても一つの答えを与えたのである．

2.3 $\boldsymbol{Z_p}[[G]]$ の局所化と $\boldsymbol{K_1}$ 群，$\boldsymbol{K_0}$ 群による問題解決の道筋

F を有限次代数体，F_n/F $(n \geq 1,\ F_1 \subset F_2 \subset \cdots)$ を有限次 Galois 拡大，$F_\infty = \cup_n F_n$，$G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ とおく．F_∞ は次の条件 (1), (2) を満たすものとする．(1) G は p 進 Lie 群，(2) 拡大 F_∞/F で分岐する素点は有限個.

上記の条件 (1), (2) の下で，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の全商環，つまり $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の非零因子全体による局所化 $Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])$ が存在する場合は (例えば G が pro p 群で位数 p の元を持たない場合は，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ には零因子がなく商斜体がとれる)，$Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])$ が $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の最も標準的な局所化と考えられる．また局所化の度合いが大きいため $K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ は大きく，p 進 zeta 関数を $K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ の元として捉えやすいのではないかとも考えられる．しかし $K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ には p 進 zeta 関数が属する上で欠点がある．1 章でみた p 進 zeta 関数と同様に非可換拡大の場合も，p 進 ‘zeta’ 関数であるため，様々な G の表現 $G \to GL_d(\bar{\boldsymbol{Z}}_p)$ に伴って得られるある種の特殊化写像によって，p 進 zeta 関数がこれらの表現に伴う，複素 Artin L 関数の特殊値と関係する値を与えること，つまりこれらの複素 Artin L 関数の特殊値を p 進補間することで p 進 zeta 関数が特徴付けられることが望まれる．しかし $K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ は局所化の度合いが激しすぎるため，そのままでは ‘ρ に伴う写像による特殊化’ は定義されない．従って例えば ρ 毎に適当な積閉集合 S で，局所化 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]_S$ が可能であり，かつ p 進 zeta 関数が $K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_S)$ の元とみなすことができるものをとり，$K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ の元である p 進 zeta 関数を $K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_S)$ の元とみなして ρ により導かれた特殊化 $K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_S) \to K_1(M_d(\bar{\boldsymbol{Q}}_p))$ による p 進 zeta 関数の像を考える，等という工夫が必要である．しかしこの方法にも，一般には $K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_S) \to K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ が単射とは限らないという問題がある．このように p 進 zeta 関数を $K_1(Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]]))$ の元として捉えるには難点がある．

従って何らかの適切な，ある意味で標準的な $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の局所化が求められる．これを論文 [6] では

次のように定めた．まず2.3冒頭に与えた条件 (1), (2) に加えて, 次の (3) も仮定する．(3) F_∞ は F の円分 $\boldsymbol{Z}_p$ 拡大 F^{cyc} を含む．(円分 $\boldsymbol{Z}_p$ 拡大 F^{cyc} とは $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{cyc}}/F) \simeq \boldsymbol{Z}_p$ かつ $[F(\mu_{p^\infty}) : F^{\mathrm{cyc}}](< \infty)$ は p と素，を満たす $F(\mu_{p^\infty})$ の唯一の部分体のことである．) この条件の下で局所化を考えていく．$H = \mathrm{Gal}(F_\infty/F^{\mathrm{cyc}})$ とおく．ここで '標準的 Ore 集合' S, S^* を次のように定義する：

$$S = \{f \in \boldsymbol{Z}_p[[G]] \mid \boldsymbol{Z}_p[[G]]/\boldsymbol{Z}_p[[G]]f \text{ は } \boldsymbol{Z}_p[[H]] \text{ 加群として有限生成}\},$$

$S^* = \cup_{n\geq 1} p^n S$．$S$, S^* は共に積閉集合で，(左右) Ore 条件を満たすこと，従って局所化 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]_S$, $\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*} = \boldsymbol{Z}_p[[G]]_S[1/p]$ が定義されることがわかっている ([6], §2)．G の表現で，ある n について有限商 $\mathrm{Gal}(F_n/F)$ を経由するもの (Artin 表現) ρ と，円分指標 κ の適当な整数ベキとの積の形に書けるもの $\kappa^r\rho : \boldsymbol{Z}_p[[G]] \to M_d(O_M)$ ($[M : \boldsymbol{Q}_p] < \infty$) は $K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]) \to K_1(M_d(O_M)) = K_1(O_M) = O_M^\times$ を導くが，更にこれは

$$\kappa^r\rho : K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*}) \longrightarrow M \cup \{\infty\} \tag{2.1}$$

に延長される ([6], §3)．この $K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*})$ に p 進 zeta 関数は属すると予想したのが論文 [6] の考えである．

簡単のため G が位数 p の元を持たないと仮定する．$\mathfrak{M}_H(G)$ を有限生成 S^* ねじれ $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群 (つまり各元がある S^* の元で消される有限生成 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群) の圏とする．すると環の局所化に伴う K 群の完全系列

$$\begin{aligned}\cdots \longrightarrow K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]) \longrightarrow K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*}) \xrightarrow{\partial_G} K_0(\mathfrak{M}_H(G))&\\ \longrightarrow K_0(\boldsymbol{Z}_p[[G]]) \longrightarrow K_0(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*}) \longrightarrow 0&\end{aligned} \tag{2.2}$$

が得られる．ここに $K_0(\boldsymbol{Z}_p[[G]])$, $K_0(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*})$ は 0 次の K 群，$K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ は圏 $\mathfrak{M}_H(G)$ の Grothendieck 群である．

G が位数 p の元を持つときは，$\mathfrak{M}_H(G)$ を少し改良 (cohomology が S^* ねじれ元からなる $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 上の有限生成射影加群の有界複体の圏にする) し，完全系列 (2.2) における $K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ の代わりにこの圏の K_0 をとることで，(2.2) と同様の完全系列が得られる．

1 章でみた円分拡大の場合の岩澤主予想 1.1.1, 1.2.1 をこの枠組みで捉えてみる．1.1 でみた円分拡大の ideal 類群の岩澤主予想の場合は，既にみたように，$F_\infty = F(\mu_{p^\infty})^+$, $\boldsymbol{Z}_p[[G]] = \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]_+$, 1.2 の楕円曲線の場合は $F = \boldsymbol{Q}$, $F_\infty = \boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty})$, $\boldsymbol{Z}_p[[G]] = \boldsymbol{Z}_p[[G_{\mu_{p^\infty}}]]$ である．(これらの場合，G は位数 p の元を持たない．) これらの場合，上の条件 (1), (2), (3) が成り立つ．そして，$\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*} = Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])$, $\mathfrak{M}_H(G)$ は有限生成ねじれ $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群の圏，となる．従って岩澤主予想 1.1.1, 1.2.1 における p 進 zeta 関数 $L_{p,F}$, $L_p(E)$ は $K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*})$ の元とみなすことができる．また岩澤主予想 1.1.1, 1.2.1 における代数的対象 $\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+$, $\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}))$ は $\mathfrak{M}_H(G)$ に属する．更に ∂_G は $f \in K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*}) = Q(\boldsymbol{Z}_p[[G]])^\times$ について $\partial_G(f) = [\boldsymbol{Z}_p[[G]]/(f)]$ ($[\ ]$ は $K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ における類) を満たす．また 1.1 でみたように，これらの場合のように $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ が $\boldsymbol{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \boldsymbol{Z}_p[[T]]$ の有限個の直積であるときは，有限生成ねじれ $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群，つまり $\mathfrak{M}_H(G)$ の対象 M はある $\oplus_{i=1}^m \boldsymbol{Z}_p[[G]]/(f_i)$ (f_i は $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の非零因子，$m < \infty$) と $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群として有限の核，余核の差を除いて同型であることが知られているが，$K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ において $[M] = [\boldsymbol{Z}_p[[G]]/(\prod_{i=1}^m f_i)]$ が成立する．以上により

定理 1.1.1 (岩澤主予想) は完全系列 (2.2) を用いて

$$\partial_G(L_{p,F}) = [\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+] - [\boldsymbol{Z}_p]$$

と表すことができるのである．また岩澤主予想 1.2.1 は完全系列 (2.2) を用いて

$$\partial_G(L_p(E)) = [\mathfrak{X}(E/\boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}))]$$

と表される．

完全系列 (2.2) を用いて非可換拡大の場合も岩澤主予想を定式化しようというのが [6] の考えである．このように局所化 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*}$ を考えることで現れた圏 $\mathfrak{M}_H(G)$ (G が位数 p の元を持つときは，$\mathfrak{M}_H(G)$ を上で述べたように改良した圏) により，代数側に生じた '$\mathfrak{X}(F_\infty)$ や $\mathfrak{X}(E/F_\infty)$ の $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群としての構造をどのように捉えるか'，という問題に $K_0(\mathfrak{M}_H(G))$ (G が位数 p の元を持つときは，$\mathfrak{M}_H(G)$ を改良した圏の K_0) における類を考える，という一つの道筋が示されもしたのである．

2.4 ideal 類群の非可換岩澤主予想

上記 2.3 の考え方に基づいた ideal 類群の非可換岩澤主予想の定式化について述べる．F_n/F ($n \geq 1$, $F_1 \subset F_2 \subset \cdots$) を有限次 Galois 拡大，$F_\infty = \cup_{n\geq 1} F_n$ とし，次の (1)–(4) が満たされているとする．(1) $G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ は p 進 Lie 群，(2) F_∞/F で分岐する F の素点は有限個，(3) $F_\infty \supset \boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty})^+ (:= \boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty}) \cap \boldsymbol{R})$, (4) F_∞ は総実．ここで Σ を F_∞/F で分岐する F の素点全体からなる有限集合とし，M_∞ を Σ に属さない全ての素点上不分岐な F_∞ の最大可換 pro-p 拡大とする．そして

$$\mathfrak{X}(F_\infty) = \mathrm{Gal}(M_\infty/F_\infty) \tag{2.3}$$

とする．$\Sigma = \{v \mid v|p\}$ のとき，(2.3) は $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varinjlim_n (A_{F_n})^-, (\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)(1))$ に一致する．1.1 は $F_n = F(\mu_{p^n})^+$ の場合に相当するが, このとき $\Sigma = \{v \mid v|p\}$ となるので, (2.3) は (1.2) $\mathfrak{X}(F(\mu_{p^\infty}))_+$ の一般化である．

1.1 で述べた円分拡大の場合の ideal 類群の岩澤主予想を，上の条件を満たす拡大に対して一般化する予想について述べる ([10], [26])．簡単のため G が位数 p の元を持たない場合に述べる．

予想 2.4.1 G は位数 p の元を持たないとする．

(1) (p 進 zeta 関数の存在) ある $\xi_{F_\infty/F} \in K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*})$ で次の条件を満たすものが存在する．任意の偶数 $r > 0$ について円分指標の r 乗 $\kappa^r : G = \mathrm{Gal}(F_\infty/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F(\mu_{p^\infty})^+/F) \to \boldsymbol{Z}_p^\times$ と Artin 表現 $\rho : G \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F_n/F) \to GL_d(O_M)$ に対し，(2.1) による $\xi_{F_\infty/F} \in K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*})$ の像 $\xi_{F_\infty/F}(\kappa^r\rho) \in M \cup \{\infty\}$ が

$$\xi_{F_\infty/F}(\kappa^r\rho) = L_\Sigma(1-r,\ F_n/F,\ \rho)$$

を満たす．ここに $L_\Sigma(s,\ F_n/F,\ \rho)$ は複素 Artin L 関数から Σ に属する Euler 成分を除いて得られる関数である．

(2) $\mathfrak{X}(F_\infty) \in \mathfrak{M}_H(G)$.

(3) (岩澤主予想) 完全系列 (2.2) により与えられる写像 ∂_G により，

$$\partial_G(\xi_{F_\infty/F}) = [\mathfrak{X}(F_\infty)] - [\boldsymbol{Z}_p]$$

が成り立つ．

G が位数 p の元を持つ場合は，予想 2.4.1 において $\mathfrak{M}_H(G)$ を ((2.2) の改良の仕方についてのところで述べたものに) 取りかえ，その変更に伴って生じる変更を完全系列 (2.2) に施す以外は，予想 2.4.1 と全く同じ形の予想が与えられる．

Ritter–Weiss が予想 2.4.1 とは少し違う形の予想を，F_∞ が F の円分 $\boldsymbol{Z}_p$ 拡大 F^{cyc} の有限次拡大である場合にやはり代数的 K 群を用いて独立にたてている ([43]).

加藤 ([26]) は p 進 Heisenberg 群 $\mathscr{H}$ と可換 p 進 Lie 群 N の直積 $\mathscr{H} \times N$ の商群として与えられる G に対して，ある条件の下，予想 2.4.1 (G が位数 p の元を持つ場合は，予想 2.4.1 を上で述べたように改良した予想) の成立を証明した．証明の方針は，様々な総実代数体の可換な岩澤主予想に帰着する，というものである．より具体的には次の通りである．G の部分群の様々な組 (U, V) で，U が G の，V が H の開部分群，更に V は U の正規部分群で U/V が可換群になる，という条件を満たすものを考える．このとき，U, V に対応する Galois 拡大 F_∞/F の中間体を各々 F_U, F_V とおくと，F_U は有限次総実体であり，可換 Galois 拡大 F_V/F_U に対しては，岩澤主予想が Wiles の定理 1.1.1 (を少し一般化した結果) として成り立っている．予想 2.4.1 を，この $(F_V/F_U)_{(U,V)}$ の可換な岩澤主予想に帰着するのである．但し非可換の場合の主予想 2.4.1 を証明するには，個々の可換拡大 F_V/F_U に対し与えられた p 進 zeta 関数達の間に合同式が成り立つことを示さなくてはならない．この点が非可換拡大の場合に生じた新たな問題である．この合同式を Hilbert 保型形式を用いて証明するのが加藤の方法である．その後，加藤の方法を用いてより一般の G に対し Kakde ([21]) が，また原 ([14], 論文 [13] の一般化) も同様の方法である種の G に対して予想 2.4.1 (G が位数 p の元を持つ場合は，予想 2.4.1 を改良した予想) を示した．また Ritter–Weiss が上に述べたように F_∞ が F の円分 $\boldsymbol{Z}_p$ 拡大 F^{cyc} の有限次拡大である場合に，独立に予想 2.4.1 とは少し違う形の予想を立て，それをある場合に (加藤とは独立に) 証明した ([43], [44]).

上の加藤の結果の証明方針のところでも触れたように，詳細は略すが，ideal 類群の非可換岩澤主予想 2.4.1 の意味するところを考察すると，これまでは個々に独立したものとして相互の関係について考察されることのなかった可換 p 進 zeta 関数の間に，合同関係の存在することが主張されていることがわかる．つまり複素 zeta 関数の特殊値のうち，これまで合同関係について考察されることのなかったものたちの間に合同関係が存在することが主張されているのである．非可換岩澤主予想から導かれるこれらの合同関係が，個々の非可換拡大の場合に具体的にどのようなものであるかを明らかにするためには複雑な計算等が必要であり，ポジティブな結果を得るのは容易ではない (例えば [25] のような考察や計算が必要である)．この，様々な非可換拡大における具体的な合同関係を明らかにすることも，大変興味深い問題である．このように岩澤理論を非可換化することで，‘別々の可換拡大に対する別々の問題’ として扱われてきた様々な問題を統一的に扱うことや，それら ‘別々の問題’ の間の関係についての考察を通して現れる問題等，新たな研究の広がり，発展の方向が提示される．また，栗原将人氏が指摘して下さったことだが，非可換岩澤主予想が ideal 類群について，具体的にどのようなことを主張しているのかを考えることも興味深い大切な問題であると思われる．

2.5 楕円曲線の非可換岩澤主予想

2.3 の考え方に基づいた楕円曲線の場合の非可換岩澤主予想の定式化を述べる．[10] にあるように，より一般の拡大 $(F_n)_n$ について考察することもできるが，一般の場合の予想は少々複雑なため，ここでは [6], §5 で扱われている次の場合についてのみ述べることとする．$p \geq 5$ とし，$E/\boldsymbol{Q}$ を p で

good ordinary reduction を持つ楕円曲線，そして $F=\boldsymbol{Q}$, $F_n=\boldsymbol{Q}(E_{p^n})$ ($E_{p^n}=\mathrm{Ker}\,(p^n:E\to E)$, $n\geq 1$) とする．E が虚数乗法を持たないときは，Serre ([45]) により，G は $GL_2(\boldsymbol{Z}_p)$ の開部分群に同型な大きな非可換群であることが知られている．一方 E が虚数乗法を持つときは G は可換な開部分群 ($\simeq \boldsymbol{Z}_p^2$) を持ち，$G$ の非可換の度合いは虚数乗法を持たない場合に比べて小さい．いずれの場合も Weil pairing の理論により $F_\infty\supset \boldsymbol{Q}(\mu_{p^\infty})$ が成り立つ．よって 2.3 にある条件 (1)–(3) が満たされており，局所化 $\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*}$ が 2.3 にある通り定義される．ここで

$$\mathfrak{X}(E/F_\infty)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\varinjlim_n \mathrm{Sel}_p(E/F_n),\ \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p)$$

とおく．

上記の非可換拡大の場合の楕円曲線の岩澤主予想を，簡単のため次の条件の下で述べる (一般の場合は $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ の係数 $\boldsymbol{Z}_p$ の拡大等が必要で少し複雑な形となる．詳細は [6], §5 にある)：

(*) F_∞ に含まれる，p が分岐しない $\boldsymbol{Q}$ の最大可換拡大は $\boldsymbol{Q}$ 自身である．

例えば $G\simeq GL_2(\boldsymbol{Z}_p)$ となるときはこの条件が満たされる．この場合，楕円曲線の岩澤主予想が次のように与えられる．

予想 2.5.1 上記 (*) を仮定する．

(1) (p 進 zeta 関数の存在) ある $\mathscr{L}_{E/F_\infty}\in K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*})$ で次の条件を満たすものが存在する．Artin 表現 $\rho:G\to GL_d(O_M)$ に対し，(2.1) による $\mathscr{L}_{E/F_\infty}\in K_1(\boldsymbol{Z}_p[[G]]_{S^*})$ の像 $\mathscr{L}_{E/F_\infty}(\rho)\in M\cup\{\infty\}$ が

$$\mathscr{L}_{E/F_\infty}(\rho)=L_\Sigma(E,\rho,1)\cdot A$$

となる．ここに Σ は p と，E が bad reduction を持つ $\boldsymbol{Q}$ 上の全素点からなる集合，$L_\Sigma(E,\rho,s)$ は E の ρ でひねられた複素 L 関数から Σ に属する Euler 成分を除いて得られる関数である．更に A は E の周期や ρ の局所定数 (ε 成分) 等からなるある値である ([6], Conjecture 5.7 参照).

(2) $\mathfrak{X}(E/F_\infty)\in\mathfrak{M}_H(G)$.

(3) (岩澤主予想) 完全系列 (2.2) により与えられる写像 ∂_G により，

$$\partial_G(\mathscr{L}_{E/F_\infty})=[\mathfrak{X}(E/F_\infty)]$$

が成り立つ．

上の (2) についてはいくつかの例等で成り立つことが示されている ([6] 参照)．(1) について，楕円曲線 E が虚数乗法を持つときは p 進 zeta 関数の存在が，虚 2 次体に伴う 2 変数 p 進 L 関数の存在 ([7], [27], [49] 等参照) より導かれる．虚数乗法を持たない場合は，$F_n=\boldsymbol{Q}(E_{p^n})$ の場合のみならず，2.3 にある条件を満たすどのような非可換拡大 G に対しても p 進 zeta 関数の存在はわかっていない．更にこの場合，(3) についても知られていない．

2.6 最後に

上で述べてきた非可換岩澤主予想はより一般の motive (と 2.3 より一般の Galois 拡大) に対しても，motive が ‘p で ordinary’ という条件を満たすとき，定式化することができる ([10])．この motive の岩澤主予想は (可換の場合も非可換の場合も)，motive の玉河数予想 (可換拡大の場合は [2], [11], [22], [23], [39], [40] 等，非可換拡大の場合は [3], [4] やこれらの設定の拡張 [16] 等) と呼ばれる，

やはり代数的対象と zeta 関数 (L 関数) の値との関係を論じる，数論において非常に重要な予想と compatible である．これに対し楕円曲線が 'p で supersingular' となる場合等，'p で ordinary' という条件が満たされない場合は，非可換岩澤主予想の定式化は未だ得られていない．可換拡大の場合，p で supersingular な楕円曲線の岩澤理論，岩澤主予想は栗原 ([30])，Pollack ([41])，小林 ([28]) 等により研究され，(1.6) と同様の結果が得られている．

また可換岩澤理論の場合，1 章で考察した特性 ideal を知ることは勿論非常に重要であるが，特性 ideal のみからは考察している有限生成ねじれ $\boldsymbol{Z}_p[[G]]$ 加群の (有限の核，余核のずれを除いた) 構造を知ることはできない．この構造をこめて岩澤主予想を定式化し，その証明をするという結果が近年栗原 ([33]，考え方は [31] や [32] からも伺われる) によって得られている．

supersingular の場合を考察することや，上記の栗原の結果を一般化すること等，非可換岩澤理論には今後取り組むべき興味深い問題が豊富にある．

紙数の関係および著者の非力により，いろいろな方々の優れた御貢献の中にも紹介することのできなかったものがあることをお詫び申し上げます．

原稿に対するレフェリーの様々な御指摘に感謝致します．

文 献

[1] H. Bass, Algebraic K-theory, Benjamin, New York-Amsterdam, 1968.

[2] S. Bloch and K. Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives, In: The Grothendieck Festschrift. vol. I, Progr. Math., **86**, Birkhäuser, Boston, 1990, pp. 333–400.

[3] D. Burns and M. Flach, Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients, Doc. Math., **6** (2001), 501–570 (electronic).

[4] D. Burns and M. Flach, Tamagawa numbers for motives with (non-commutative) coefficients. II, Amer. J. Math., **125** (2003), 475–512.

[5] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques, Invent. Math., **51** (1979), 29–59.

[6] J. Coates, T. Fukaya, K. Kato, R. Sujatha and O. Venjakob, The GL_2 main conjecture for elliptic curves without complex multiplication, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **101** (2005), 163–208.

[7] J. Coates and A. Wiles, On p-adic L-functions and elliptic units, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, **26** (1978), 1–25.

[8] P. Deligne and K. A. Ribet, Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Invent. Math., **59** (1980), 227–286.

[9] J. D. Dixon, M. P. F. du Sautoy, A. Mann and D. Segal, Analytic pro-p-groups, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **157**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[10] T. Fukaya and K. Kato, A formulation of conjectures on p-adic zeta functions in noncommutative Iwasawa theory, Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. vol. XII, 2006, pp. 1–85 (Translated in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **219**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006).

[11] J.-M. Fontaine and B. Perrin-Riou, Autour des conjectures de Bloch et Kato: cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, In: Motives, Proceedings of the AMS–IMS–SIAM Joint Summer Research Conference, Univ. of Washington, 1991, (eds. U. Jannsen, S. Kleimen and J.-P. Serre), Proc. Sympos. Pure Math., **55**, part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 599–706.

[12] 八森祥隆, 非可換岩澤理論について, 第 49 回代数学シンポジウム報告集, 2004.

[13] T. Hara, Iwasawa theory of totally real fields for certain non-commutative p-extensions, J. Number Theory, **130** (2010), 1068–1097.

[14] T. Hara, Inductive construction of the p-adic zeta functions for non-commutative p-extensions of totally real fields with exponent p, preprint, 2009.

[15] 堀江邦明, 岩澤不変量について, 数学, **48** (1996), 358–371.

[16] A. Huber and G. Kings, Equivariant Bloch–Kato conjecture and non-abelian Iwasawa main conjecture, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. vol. II, Beijing, 2002, (ed. T. Li), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 149–162.

[17] K. Iwasawa, On Γ-extensions of algebraic number fields, Bull. Amer. Math. Soc., **65** (1959), 183–226.

[18] 岩澤健吉, 代数体と函数体のある類似について, 数学, **15** (1963), 65–67.

[19] K. Iwasawa, Analogies between number fields

and function fields, In: Some Recent Advances in the Basic Sciences, **2**, Proceedings of Annual Sci. Conf., Belfer Grad. School Sci., Yeshiva Univ., New York, 1965–1966, Belfer Grad. School Sci., Yeshiva Univ., 1965, pp. 203–208.

[20] K. Iwasawa, On $\boldsymbol{Z}_l$-extensions of algebraic number fields, Ann. of Math. (2), **98** (1973), 246–326.

[21] M. Kakde, Proof of the main conjecture of noncommutative Iwasawa theory for totally real number fields in certain cases, Thesis, Univ. of Cambridge, 2008.

[22] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L-functions via B_{dR}. I, In: Arithmetic algebraic geometry, (ed. E. Ballico), Lecture Notes in Math., **1553**, Springer, Berlin, 1993, pp. 50–163.

[23] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse–Weil L-functions via B_{dR} II, preprint, 1993.

[24] K. Kato, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque, **295** (2004), 117–290.

[25] K. Kato, K_1 of some non-commutative completed group rings, K-Theory, **34** (2005), 99–140.

[26] K. Kato, Iwasawa theory of totally real fields for Galois extensions of Heisenberg type, preprint, 2006.

[27] N. M. Katz, p-adic interpolation of real analytic Eisenstein series, Ann. of Math. (2), **104** (1976), 459–571.

[28] S. Kobayashi, Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes, Invent. Math., **152** (2003), 1–36.

[29] T. Kubota and H.-W. Leopoldt, Eine p-adische Theorie der Zetawerte. I, Einführung der p-adischen Dirichlets chen L-Funktionen, J. Reine Angew. Math., **214/215** (1964), 328–339.

[30] M. Kurihara, On the Tate Shafarevich groups over cyclotomic fields of an elliptic curve with supersingular reduction. I, Invent. Math., **149** (2002), 195–224.

[31] M. Kurihara, Iwasawa theory and Fitting ideals, J. Reine angew. Math., **561** (2003), 39–86.

[32] M. Kurihara, On the structure of ideal class groups of CM-fields, Doc. Math., **2003**, Extra Vol. (Kazuya Kato's fiftieth birthday), 539–563 (electronic).

[33] M. Kurihara, Refined Iwasawa theory and Kolyvagin systems of Gauss sum type, preprint, 2008.

[34] J. C. McConnell and J. C. Robson, Noncommutative Noetherian rings, Grad. Stud. Math., **30**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.

[35] B. Mazur, Rational points of abelian varieties with values in towers of number fields, Invent. Math. **18** (1972) 183–266.

[36] B. Mazur and P. Swinnerton-Dyer, Arithmetic of Weil curves, Invent. Math., **25** (1974), 1–61.

[37] B. Mazur, J. Tate and J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer, Invent. Math., **84** (1986), 1–48.

[38] B. Mazur and A. Wiles, Class fields of abelian extensions of $\boldsymbol{Q}$, Invent. Math., **76** (1984), 179–330.

[39] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math., **115** (1994), 81–161.

[40] B. Perrin-Riou, Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, Astérisque, **229** (1995), 198 pp.

[41] R. Pollack, On the p-adic L-function of a modular form at a supersingular prime, Duke Math. J., **118** (2003), 523–558.

[42] K. Rubin, The "main conjectures" of Iwasawa theory for imaginary quadratic fields, Invent. Math., **103** (1991), 25–68.

[43] J. Ritter and A. Weiss, Toward equivariant Iwasawa theory. I, Manuscripta Math., **109** (2002), 131–146; II, Indag. Math. (N.S.), **15** (2004), 549–572; III, Math. Ann., **336** (2006), 27–49; IV, Homology, Homotopy Appl., **7** (2005), 155–171.

[44] J. Ritter and A. Weiss, Equivariant Iwasawa theory: an example, Doc. Math., **13** (2008), 117–129.

[45] J. P. Serre, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, Invent. Math., **15** (1972), 259–331.

[46] O. Venjakob, Characteristic elements in noncommutative Iwasawa theory, J. Reine Angew. Math., **583** (2005), 193–236.

[47] A. Weil, Courbes Variétés abéliennes et courbes algébriques, Hermann & Cie., Paris, 1948, 165 pp.

[48] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields, Ann. of Math. (2), **131** (1990), 493–540.

[49] R. I. Yager, On two variable p-adic L-functions, Ann. of Math. (2), **115** (1982), 411–449.

追記 本原稿提出後であるごく最近 (2010 年), Kakde と Ritter–Weiss の各々により, '$\mu = 0$' という条件が成り立つときに総実代数体の非可換岩澤主予想 (予想 2.4.1) の証明を与えた preprint が出されました.

(2009 年 10 月 4 日提出)

(ふかや たかこ・慶應義塾大学商学部)