【現代数学レクチャーシリーズ】

代数幾何学の空間概念（その 1）

加藤文元

CONTENTS

現代数学レクチャーシリーズ 2019 第 3 回（その 1）2020 年 5 月 10 日.

1. 導入

中心テーマ

★ 代数幾何学的空間の設計思想
- 【その 1（今日)】アフィン空間と射影空間
- 【その 2（次回)】代数幾何学における点概念

★【その 1（今日)】代数幾何学があつかう典型的空間：代数多様体

代数多様体 = アフィン代数多様体（局所的空間）の貼り合わせ（大域的空間）
アフィン代数多様体 = 多項式による連立方程式の解空間

- 基本的な問い
  - 係数は代数閉体（例えば，複素数）からとることのご利益は何か？
  - 射影空間のような「大域的な」空間を考えることのご利益は何か？

$\rightsquigarrow$ いろいろな状況（実数上のアフィン平面，複素数上のアフィン平面，複素数上の射影平面）の 2 次曲線の分類を通して考える。

★【その 2（次回)】「点とは何か？」という根本的問題を考える。そのため，考える空間はすべて局所的なもの（アフィン空間）で考える。

体上の代数幾何学における点 = 極大イデアル
スキーム論における点 = 素イデアル

- 基本的な問い
  - 体上の代数幾何学が，極大イデアルを点概念として採用する理由は？
  - スキーム論における点概念が素イデアルになる必然性は何か？
  - そもそもスキーム論とはどういう理論であり，何を目指す理論なのか？

★ 注意（本来 1 回の講義だったものを 2 つに分けたため)【その 1（今日)】には可換環論は（あまり）出てきません！

2. 2次曲線

2.1. 2次曲線の分類.

(x, y) 平面上の（高々）2次曲線

$$C: \ F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

（a, b, c, d, e, f は実数）を考える。上手に座標 (x, y) を線形変換して，定義式 $F(x, y)$ を簡単することを考えよう。

[1] $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ のとき：$F(x, y)$ は高々1次式である。

[2] $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ のとき：$c \neq 0$ なら x, y を取り換えて $a \neq 0$ としてよい。また，$a = c = 0$ でも，$(x, y) \mapsto (x, x + y)$ という線形変換をして $a \neq 0$ の場合に帰着する。よって，$a \neq 0$ として一般性を失わない。

$$(*) \quad \begin{aligned} a \cdot F(x, y) &= (ax)^2 + 2(by + d)ax + acy^2 + 2aey + af \\ &= (ax + by + d)^2 + (ac - b^2)y^2 + 2(ae - bd)y + af - d^2 \end{aligned}$$

ここで

$$D = ac - b^2$$

とする。

[2a] $D \neq 0$ なら

$$\begin{aligned} aD \cdot F(x, y) &= D(ax + by + d)^2 + (Dy)^2 + 2(ae - bd)(Dy) + (af - d^2)D \\ &= D(ax + by + d)^2 + (Dy + ae - bd)^2 + g \end{aligned}$$

（g は実数）より，$(ax + by + d, Dy + ae - bd) \mapsto (x, y)$ という線形変換をして，題意の曲線は

$$Dx^2 + y^2 + h = 0$$

（$D \neq 0$，h は実数）という形になる。

• $D > 0$ のとき：$\sqrt{D}x$ を x と置き直して

$$x^2 + y^2 + h = 0$$

$h < 0$ なら，x, y を $\sqrt{-h}x$, $\sqrt{-h}y$ と置き直して

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad \text{（楕円）}$$

$h = 0$ では一点，$h > 0$ では空集合

• $D < 0$ のとき：$\sqrt{-D}x$ を x と置き直して

$$x^2 - y^2 - h = 0$$

$h = 0$ なら2本の直線（$x \pm y = 0$）。$h \neq 0$ のとき，$h < 0$ ならば x と y を入れ替えて $h > 0$ としてよい。x, y を $\sqrt{h}x$, $\sqrt{h}y$ と置き直して

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad \text{（双曲線）}$$

[2b] $D = 0$ のとき，$(*)$ において $(ax + by + d, y) \mapsto (x, y)$ という線形変換をすると，

$$x^2 + 2hy + k = 0$$

（h, k は実数）という形になる。

• $h \neq 0$ なら $2hy + k$ を y と置き直して

$$x^2 + y = 0 \quad （放物線）$$

• $h = 0$ のとき：$k < 0$ なら 2 本の直線，$k = 0$ なら 1 本の直線（2 重直線），$k > 0$ なら空集合

以上で，次の定理を得た。

定理（実数上の 2 次曲線の分類）

実数上の (x, y) 平面の（高々）2 次曲線は，座標の線形変換で以下のもののどれかになる。

[1] 1 次以下に退化する

[2-1] 楕円 $x^2 + y^2 - 1 = 0$

[2-2] 双曲線 $x^2 - y^2 - 1 = 0$

[2-3] 放物線 $x^2 + y = 0$

[2-4] 2 本の直線

[2-5] 1 本の（2 重）直線

[2-6] 1 点

[2-7] 空集合

2.2. 複素数上のアフィン平面と代数的集合. 通常の (x, y) 平面（アフィン平面）は，2 つの実数の組 (a, b) で位置が決まる平面のことであった。

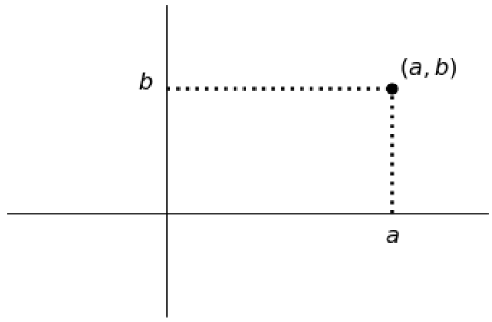

FIGURE 1. アフィン平面

実数上のアフィン平面

- 点 (a, b)：x 座標 $= a$, y 座標 $= b$（a, b は実数）
- 横軸 $= x$ 軸，縦軸 $= y$ 軸
- 原点 = 点 $(0, 0)$
- 実数上のアフィン平面 $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$（$\mathbb{R}$ = 実数全体の集合）

実数上のアフィン平面 $\mathbb{R}^2$ にならって，2 つの複素数の組 (a, b) で点が決まる “平面” を考える。

複素数上のアフィン平面

- 点 (a, b)：x 座標 $= a$, y 座標 $= b$（a, b は複素数）
- “横軸”$= x$ 軸，“縦軸”$= y$ 軸
- 原点 = 点 $(0, 0)$
- 複素数上のアフィン平面 $\mathbb{C}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$（$\mathbb{C}$ = 複素数全体の集合）

★「複素数上のアフィン平面」は，x 座標と y 座標をそれぞれ実部と虚部に分けると

$$x = u + vi, \quad y = w + zi$$

4 つの座標 (u, v, w, z) をもつ実数上の 4 次元アフィン空間 $\mathbb{R}^4$ とみなせる（しかし，この見方はあまり有用ではない）。

アフィン平面の代数的集合

2 変数多項式 $F(x, y)$ に $(x, y) = (a, b)$ と代入したときの値が 0 になるような点 (a, b) の全体

$$V(F) = \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid F(a, b) = 0\}$$

のような集合は，代数的集合と呼ばれる．これは x と y に関する方程式

$$F(x, y) = 0$$

の解全体（解空間）ということになる．

例えば，$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ による代数的集合 $V(F)$（の実数点）は図 2 のようになる（デカルトの葉線）．

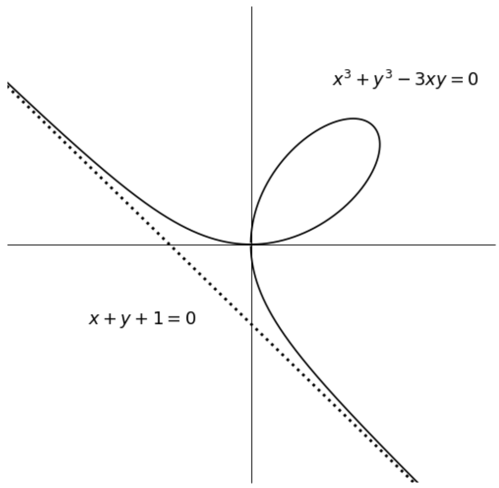

Figure 2. デカルトの葉線（$x^3 + y^3 - 3xy = 0$）とその漸近線

2.3. 複素数上の 2 次曲線の分類.

(x, y) 平面上の（高々）2 次曲線

$$C:\ F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

（a, b, c, d, e, f は複素数）を考える。上手に座標 (x, y) を線形変換して，定義式 $F(x, y)$ を簡単することを考えよう。

[1] $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ のとき：$F(x, y)$ は高々 1 次式である。

[2] $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ のとき：$c \neq 0$ なら x, y を取り換えて $a \neq 0$ としてよい。また，$a = c = 0$ でも，$(x, y) \mapsto (x, x + y)$ という線形変換をして $a \neq 0$ の場合に帰着する。よって，$a \neq 0$ として一般性を失わない。

$$(*)\qquad \begin{aligned} a \cdot F(x, y) &= (ax)^2 + 2(by + d)ax + acy^2 + 2aey + af \\ &= (ax + by + d)^2 + Dy^2 + 2(ae - bd)y + af - d^2 \end{aligned}$$

（ここで $D = ac - b^2$ とした）。

[2a] $D \neq 0$ のとき，$\delta^2 = D$ となる複素数 δ をとると

$$\begin{aligned} aD \cdot F(x, y) &= D(ax + by + d)^2 + (Dy)^2 + 2(ae - bd)(Dy) + (af - d^2)D \\ &= \{\delta(ax + by + d)\}^2 + (Dy + ae - bd)^2 + g \end{aligned}$$

（g は実数）より，$(\delta(ax + by + d), Dy + ae - bd) \mapsto (x, y)$ という線形変換をして，題意の曲線は

$$C:\ x^2 + y^2 + h = 0$$

（h は複素数）という形になる。

• $h \neq 0$ なら，x, y をそれぞれ h の平方根倍して，

$$C:\ x^2 + y^2 + 1 = 0$$

の形になる。

• $h = 0$ なら可約（2 本の直線 $x \pm iy = 0$）である。

[2b] $D = 0$ のとき，$(ax + by + d, y) \mapsto (x, y)$ という線形変換をすると，$(*)$ より題意の曲線は

$$C:\ x^2 + 2hy + k = 0$$

（h, k は実数）という形になる。

• $h \neq 0$ なら $2hy + k$ を y に取り換えて

$$C:\ x^2 + y = 0$$

の形になる。

• $h = 0$ のとき：$k \neq 0$ なら可約（2 本の直線 $x \pm ik = 0$），$k = 0$ なら 1 本の直線（2 重直線）

以上で，次の定理を得た。

定理（複素数上の 2 次曲線の分類）

複素数上の (x, y) 平面の（高々）2 次曲線は，座標の線形変換で以下のもののどれかになる。

[1] 1 次以下に退化する

[2-1] $x^2 + y^2 + 1 = 0$ （既約）

[2-2] $x^2 + y = 0$ （既約）

[2-3] 2 本の直線 （可約）

[2-4] 1 本の（2 重）直線 （非被約（non-reduced））

★ 実数から複素数に基礎体を変更することで，分類のリストはかなり短くなった。しかし，まだいくつかの「例外処理」をしなければならない。

★ 複素数上では "曲線" が 1 点や空集合になることはない（ヒルベルトの零点定理）。実際，複素数上で作業すると，代数的集合から定義式をかなりの程度復元することができる.

定理（ヒルベルトの零点定理の特別な形）

複素数係数の既約な 2 変数多項式 $f(x, y)$ で定義される代数的集合 $V(f)$ を考える．複素数係数の 2 変数多項式 $g(x, y)$ が $V(f)$ のすべての点で 0 をとる，すなわち $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ について

$$「f(a, b) = 0 \quad ならば \quad g(a, b) = 0」$$

が成り立つとき，$g(x, y)$ は $f(x, y)$ で割り切れる.（特に，$V(f)$ は空集合ではない.）

3. 射影平面

3.1. 斉次座標.

射影平面の斉次座標（同次座標とも言う）とは，3 つの数（以下では複素数とする）の組

$$(a, b, c)$$

で決まる。ただし，次の約束事をおく：

(a) a, b, c は全てが同時に 0 とはならない：$(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
(b) 一斉に定数倍されたものは同じ点とみなす：$(a, b, c) = (ka, kb, kc)$（$k \neq 0$）

つまり，3 つの数の「比」のみで表される点の座標という考え方である。以後，斉次座標は

$$(a : b : c)$$

と書く。

例． $(1 : 2 : 3) = (2 : 4 : 6) = (-1 : -2 : -3), (a : 0 : 0) = (1 : 0 : 0)$（$a \neq 0$）

■ 斉次化と非斉次化． 射影座標 $(a : b : c)$ で $c \neq 0$ であるもの全体を U_0 とする：

$$U_0 = \{(a : b : c) \,|\, c \neq 0\}$$

$c \neq 0$ なら $(a : b : c) = (a/c : b/c : 1)$ なので（全体に c^{-1} をかけた），アフィン平面の点 $(a/c, b/c) \in \mathbb{C}^2$ が決まる（非斉次化）。

逆にアフィン平面の点 $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ について，斉次座標 $(a : b : 1)$ が決まる（斉次化）.

z 座標に関する斉次化と非斉次化

以上より，

$$(a/c, b/c) \quad \longleftrightarrow \quad (a : b : c) = (a/c : b/c : 1) \in U_0$$

で，U_0 とアフィン平面 $\mathbb{C}^2$ の間に一対一対応がある。すなわち，U_0 はこの対応で，アフィン平面 $\mathbb{C}^2$ とみなすことができる。

以上は斉次座標 $(x : y : z)$ の，z 座標に関する斉次化と非斉次化である．同様に y 座標や x 座標に関する斉次化と非斉次化もできる．

$$U_1 = \{(a : b : c) \,|\, b \neq 0\}$$
$$U_2 = \{(a : b : c) \,|\, a \neq 0\}$$

として，

$$(a/b, c/b) \quad \longleftrightarrow \quad (a : b : c) = (a/b : 1 : c/b) \in U_1$$
$$(b/a, c/a) \quad \longleftrightarrow \quad (a : b : c) = (1 : b/a : c/a) \in U_2$$

と対応する．

演習問題 1. 次の斉次座標 $(x : y : z)$ を，y 座標に関して非斉次化せよ：

(1) $(1 : 2 : 3)$　　(2) $(0 : -1 : 0)$

3.2. 射影平面.

定義（射影平面）

射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ とは，複素斉次座標 $(a : b : c)$ で表される点の全体の集合である。

したがって，射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ は，U_0, U_1, U_2 という 3 つのアフィン平面の貼り合わせである．

- U_0 は座標 $\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$ をもつアフィン平面 $\mathbb{C}^2$
- U_1 は座標 $\left(\dfrac{z}{y}, \dfrac{x}{y}\right)$ をもつアフィン平面 $\mathbb{C}^2$
- U_2 は座標 $\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$ をもつアフィン平面 $\mathbb{C}^2$

と，それぞれみなせる．

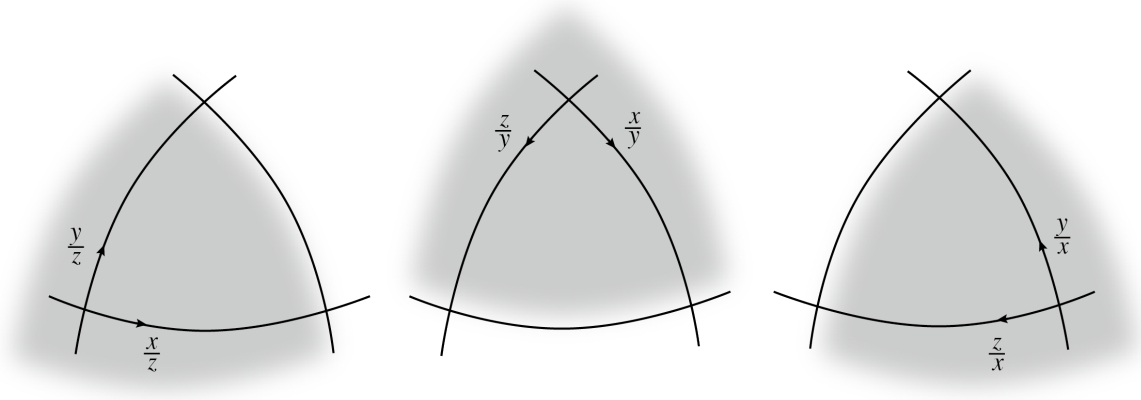

FIGURE 3. 射影平面の 3 つのアフィン平面

■ **無限遠直線．** 射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ は，U_0 というアフィン平面と

$$L_0 = \{(a : b : c) \,|\, c = 0\}$$

の和になるが，L_0 はさらに

$$L_0 = \{(a : b : 0) \,|\, b \neq 0\} \cup \{(1 : 0 : 0)\}$$

と分解され，$\{(a : b : 0) \,|\, b \neq 0\}$ は $b \neq 0$ で座標を割ることで

$$a/b \quad \longleftrightarrow \quad (a : b : 0) = (a/b : 1 : 0)$$

という対応でアフィン直線 $\mathbb{C} = \mathbb{C}^1$ と同一視される。

射影平面の分解

以上より，射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ は集合としてはアフィン平面（2 次元のアフィン空間）とアフィン直線（1 次元のアフィン空間）と点（0 次元のアフィン空間）の和になっている：

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{C}) = U_0 \amalg L_0 = \mathbb{C}^2 \amalg \mathbb{C}^1 \amalg \mathbb{C}^0$$

L_0 は，アフィン平面 U_0 の無限遠直線と呼ばれる。

4. 射影平面の 2 次曲線

4.1. 斉次多項式と代数的集合.

■ **斉次多項式．** 3 変数多項式 $F(x, y, z)$ が d 次の斉次（homogenous）多項式であるとは，$F(x, y, z)$ に現れる単項式が，すべて d 次の単項式であることである。

例． 1 次の斉次多項式は

$$ax + by + cz \qquad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

の形（定数項がないことに注意）。2 次の斉次多項式は

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dzx + exy + fyz$$

の形である。

演習問題 2. 3 次の単項式をすべて書き出してみよ。（3 次の斉次多項式は，それらに係数をつけてたし合わせたものになっている。）

注意． d 次の n 変数単項式の個数は $\binom{d+n-1}{n-1}$ 個である。

■ **射影平面の代数的集合．** 3 変数斉次多項式 $F(x, y, z)$ に $(x, y, z) = (a, b, c)$ と代入したときの値が 0 になるような斉次座標 $(a : b : c)$ の点全体

$$V(F) = \{(a : b : c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid F(a, b, c) = 0\}$$

のような集合は，$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の代数的集合と呼ばれる.

注意． $F(x, y, z)$ が d 次の斉次多項式なら，任意の $k \neq 0$ について

$$F(ka, kb, kc) = k^d F(a, b, c)$$

である．したがって，斉次座標 $(a : b : c)$ に対して $F(a, b, c) = 0$ であることは整合的である（矛盾がない）.

■ **多項式の斉次化．** $F(x, y, z)$ が d 次の斉次多項式なら，$\dfrac{F(x, y, z)}{z^d}$ は $u = \dfrac{x}{z}, v = \dfrac{y}{z}$ についての多項式 $f(u, v)$ になる．$f(u, v)$ を斉次多項式 $F(x, y, z)$ の非斉次化という.

演習問題 3. $F(x, y, z) = zy - x^2$ を非斉次化して $u = \dfrac{x}{z}, v = \dfrac{y}{z}$ についての多項式にせよ.

逆に，u, v についての任意の多項式 $f(u, v)$ について，$u = \dfrac{x}{z}, v = \dfrac{y}{z}$ を代入し，これに z のべきをかけて，斉次多項式 $F(x, y, z)$ を得ることができる．これを斉次化という.（普通は，$z^d f\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$ が多項式になる最小の d をかける.）

演習問題 4. $f(u, v) = u^2 + v^2 - 1$ を $u = \dfrac{x}{z}, v = \dfrac{y}{z}$ によって斉次化せよ.

4.2. 射影平面曲線の例.

■ 2 次曲線の例． 単位円の定義式 $f(u,v) = u^2 + v^2 - 1$ の斉次化 $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ について，対応する代数的集合 $V(F)$ を描いてみよう．

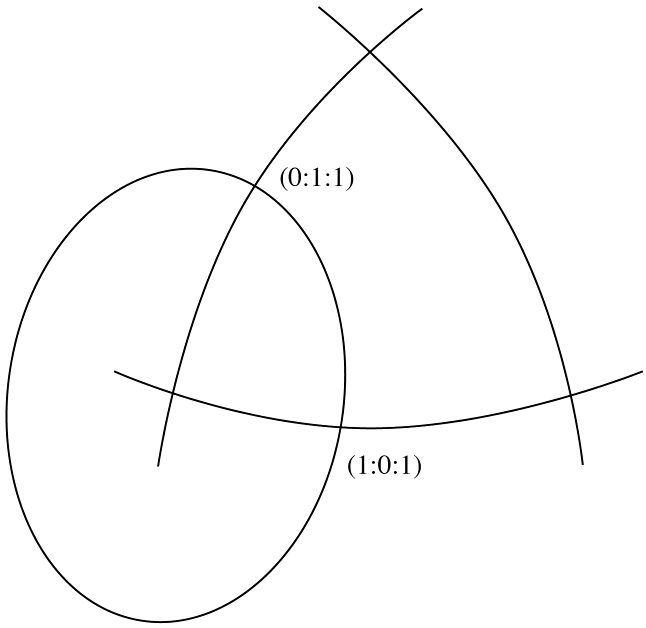

図 2. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

- 座標 $\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right)$ をもつアフィン平面 U_0 で見ると，通常の単位円 $u^2 + v^2 - 1 = 0$ である．
- 座標 $\left(\dfrac{z}{y}, \dfrac{x}{y}\right)$ をもつアフィン平面 U_1 で見ると，$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ を $u' = \dfrac{z}{y}, v' = \dfrac{x}{y}$ で非斉次化して，$v'^2 + 1 - u'^2 = 0$ を得るので，これは双曲線 $u'^2 - v'^2 = 1$ に見える．
- 座標 $\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{z}{x}\right)$ をもつアフィン平面 U_2 で見ると，$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ を $u'' = \dfrac{y}{x}, v'' = \dfrac{z}{x}$ で非斉次化して，$1 + u''^2 - v''^2 = 0$ を得るので，これは双曲線 $v''^2 - u''^2 = 1$ に見える．

■ 平行な直線． 直線の方程式 $v = au + b$（$a, b \in \mathbb{C}$）を斉次化した $F(x,y,z) = ax - y + bz$ について，対応する代数的集合 $V(F)$ を描いてみよう．

これらの図形は，すべて直線になる．$z = 0$ を代入するとわかるように，これらはすべて「無限遠直線」$z = 0$ とは b に依らない点 $(1 : a : 0)$ で交わる．すなわち，アフィン平面 U_0 上の平行な直線は，無限遠点で交わり，その点は直線の傾き（方向）のみに依存する．

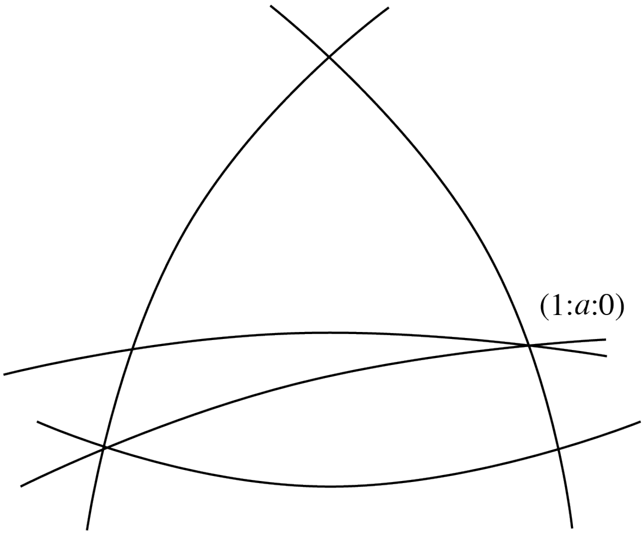

図 3. $ax - y = 0$ と $ax - y + z = 0$

4.3. 複素数上の射影平面内の 2 次曲線の分類.

射影平面内の 2 次曲線
$$C:\ F(x,y,z) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dzx + 2eyz + fz^2$$
$$= ax^2 + cy^2 + fz^2 + 2bxy + 2eyz + 2dzx = 0$$
（a,b,c,d,e,f は複素数）を考える。上手に座標 (x,y,z) を線形変換して，定義式 $F(x,y,z)$ を簡単することを考えよう。

$(a,c,f) \neq (0,0,0)$ のとき：x,y,z を適当に入れ替えて，$a \neq 0$ としてよい。また $(a,cf) = (0,0,0)$ であっても，このときは少なくとも $(b,e,d) \neq (0,0,0)$ なので，例えば $b \neq 0$ ならば $(x,y,z) \mapsto (x, x+y, z)$ という線形変換をすれば $a \neq 0$ の場合に帰着する。よって，以下では $a \neq 0$ として一般性を失わない。

$$(*)\quad \begin{aligned} a\cdot F(x,y,z) &= (ax)^2 + 2(by+dz)ax + acy^2 + 2aeyz + afz^2 \\ &= (ax+by+dz)^2 + Dy^2 + 2(ae-bd)yz + (af-d^2)z^2 \end{aligned}$$

（ここで $D = ac - b^2$ とした）。

[1] $D \neq 0$ のとき，$\delta^2 = D$ となる複素数 δ をとると
$$aD\cdot F(x,y) = D(ax+by+dz)^2 + (Dy)^2 + 2(ae-bd)(Dyz) + (af-d^2)Dz^2$$
$$= \{\delta(ax+by+dz)\}^2 + (Dy + (ae-bd)z)^2 + gz^2$$
（g は実数）より，$(\delta(ax+by+dz), Dy+(ae-bd)z, z) \mapsto (x,y,z)$ という線形変換をして，題意の曲線は
$$C:\ x^2 + y^2 + hz^2 = 0$$
（h は複素数）という形になる。

• $h \neq 0$ なら，x,y をそれぞれ h の平方根倍して，
$$C:\ x^2 + y^2 + z^2 = 0$$
の形になる。

• $h = 0$ なら
$$C:\ x^2 + y^2 = 0$$
すなわち，2 本の直線 $(x+iy)(x-iy) = 0$（可約形）である。

[2] $D = 0$ のとき，$(ax+by+dz, y, z) \mapsto (x,y,z)$ という線形変換をすると，$(*)$ より題意の曲線は
$$C:\ x^2 + 2hyz + kz^2 = 0$$
（h,k は実数）という形になる。

[2a] $(h,k) \neq 0$ のとき，$h \neq 0$ なら $(x,y,z) \mapsto (x,y,y+z)$ という線形変換をすると，$D = 2h$ として [1] の場合に帰着する。$k \neq 0$ なら $(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$（y と z を入れ替える）という線形変換をすると，$D = k$ として [1] の場合に帰着する。

[2b] $(h,k) = 0$ のとき，題意の曲線は
$$C:\ x^2 = 0$$
（1 本の 2 重直線）になる。

【別解】題意の 2 次斉次多項式 $F(x,y,z) = ax^2 + cy^2 + fz^2 + 2bxy + 2eyz + 2dzx$ は，3×3 の対称行列

$$A = \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

を用いると，$\boldsymbol{x} = {}^t(x\ y\ z)$ として

$$F(x,y,z) = {}^t\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$$

と書ける。線形代数でよく知られているように，複素数上の対称行列 A について，適当な正則行列 P をとると

$${}^tPAP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

となる。そこで $\boldsymbol{x} \mapsto P^{-1}\boldsymbol{x}$ という線形変換を施せば，題意のは

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{or} \quad x^2 + y^2 \quad \text{or} \quad x^2$$

となる。

以上より，次の定理が得られた。

定理（複素数上の射影平面内の 2 次曲線の分類）

複素数上の射影平面内の 2 次曲線は，座標の線形変換で以下のもののどれかになる。

[1] $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ （既約）

[2] $x^2 + y^2 = 0$ （2 本の直線・可約）

[3] $x^2 = 0$ （1 本の（2 重）直線・非被約（non-reduced））

★ 基礎体を複素数体にして，さらに考えている入れ物空間（ambient space）を射影平面にすることで，分類のリストはさらに短くなった。短くなっただけでなく「例外処理」がなくなり，リストが規則的になっている。そういう意味で,「2 次曲線」という代数幾何的対象の本質が，よりクリアに顕れるようになったと言える。

★ 複素数上の（アフィン平面内の）2 次曲線の分類との比較：

- 「1 次以下に退化したもの」は，2 本の直線でその 1 本が無限遠直線になっているもの
- 「$x^2 + y = 0$」は，無限遠直線に接している既約 2 次曲線のアフィン平面への制限

★ 参考・複素数体上の射影平面内の 3 次曲線の分類

- 2 次曲線と違い，既約でも特異点を持つ場合（例：$y^2 = x^3$）がある。
- 非特異なものはワイエルシュトラス標準形 $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ の形にできる。ここで j 不変量 $j = 1728g_2^3/\Delta$（$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$）が本質的なパラメーターである。（つまり，2 次曲線の場合と違って，1 次元分のパラメータがある。）

東京工業大学 理学院 数学系 〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1
E-mail address: bungen@math.titech.ac.jp