【現代数学レクチャーシリーズ】

代数幾何学の空間概念（その 2）

加藤文元

Contents

現代数学レクチャーシリーズ 2019 第 3 回（その 2）2020 年 5 月 17 日.

1. 導入

中心テーマ

★ 代数幾何学的における空間の設計思想
- 点概念（←今日はここに的を絞る）
- 位相概念（Zariski 位相）
- 関数概念（構造層）

★「点とは何か？」という根本的問題を考える。そのため，考える空間はすべて局所的なもの（アフィン空間）で考える。

体上の代数幾何学における点 = 極大イデアル
スキーム論における点 = 素イデアル

- 基本的な問い
  - 体上の代数幾何学が，極大イデアルを点概念として採用する理由は？
  - スキーム論における点概念が素イデアルになる必然性は何か？
  - そもそもスキーム論とはどういう理論であり，何を目指す理論なのか？

■ 代数幾何学の基本的な文献

- 飯高茂・浪川幸彦・上野健爾『デカルトの精神と代数幾何』日本評論社；増補版（1993）
  — インフォーマルな形で代数幾何学のエッセンスをオムニバス的にまとめられている．入門書としても読み物としても適しているが，残念なことに現在は品切れ．

- 上野健爾『代数幾何入門』岩波書店（1995）
  — 初学者向け入門書として有名．入り口のハードルは低く設定されており，射影空間の幾何学についてわかりやすく読めるだろう．しかし，内容はだんだん難しくなってくるので，最後まで読み進むのは大変かもしれない．代数系についての簡単なまとめが付録にされているが，これだけで十分とは思えないので，ある程度の大学学部専門課程くらいの予備知識は必要だろう．

- 広中平祐・森重文・丸山正樹・森脇淳・川口周『代数幾何学』京都大学学術出版会（2004）
  — 前半は可換環論と代数的集合について，後半はスキーム理論が概説されている．コンパクトにまとめられていて具体例も豊富だが，大学学部専門課程くらいの予備知識は必要．

- ハーツホーン『代数幾何学 1,2,3』（高橋宣能・松下大介訳）丸善出版（2012）
  — 長年，代数幾何学を学ぶ上で最も標準的な教科書とされてきた．最初の章で古典的な代数幾何学についてコンパクトにまとめて，第 2 章から本格的にスキーム論が始まる。大学学部専門課程くらいの予備知識は必要．

その他，主な洋書：

• Eisenbud, D.; Harris, J: The Geometry of Schemes. Springer-Verlag. 1998.

• Mumford, D. The Red Book of Varieties and Schemes: Includes the Michigan Lectures (1974) on Curves and Their Jacobians (2nd ed. ed.). Springer-Verlag. 1999.

• Liu, Q.: Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. Oxford University Press. 2002

• Grothendieck, A.; Dieudonné J. Eléments de Géométrie Algébrique. Inst. Hautes Etudes Sci. 1960.

2. 体上の代数幾何学

2.1. 可換環と可換環上の代数.

★ 以下，可換環と言ったら「1 をもつ可換環」のこととする。

可換環上の代数

可換環の準同型 $A \to B$ を A **代数**という。通常は B のみを表示し「B は A 代数」と言ったりするが，その場合，$A \to B$ は可換環 B の A 代数としての構造を表す射ということで**構造射**と呼ばれる。

• 任意の可換環 A に対して，環準同型 $\mathbb{Z} \to A$ が一つ，しかもただ一つだけ定まる。言い換えれば，任意の可換環にはただ一つのやり方で $\mathbb{Z}$ 代数の構造が入る。すなわち，可換環とは $\mathbb{Z}$ 代数のことである。

• 体 K 上の（零環でない）代数 A の構造射 $K \to A$ は必ず単射である。よって，零でない K 代数 A は K（に同型な環）を部分環として含む。特に A 自体が体であるときは，A は K の**拡大体**と呼ばれる。

可換環上の多項式環

可換環 A 上の $x_1, x_2, \ldots x_n$ を不定元とする多項式全体のなす可換環を

$$A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

で表す（「A 上の多項式」とは，A の要素を係数とする多項式のことである）。$A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ は「A の要素を定数とみなす写像」

$$A \longrightarrow A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

によって，自然に A 代数である。

• 例えば，$x^2 + y^2 + 1$ は $\mathbb{Z}$ 上の（2 変数）多項式である。

• B を A 代数とする。このとき，A 上の多項式は，その係数をすべて B に写して B の要素とみなすことによって，B 上の多項式と思うことができる。

• よって，例えば $\mathbb{Z}$ 上の多項式 $x^2 + y^2 + 1$ は $\mathbb{Q}$ 上の多項式を思うこともできるし，また，$\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$（$p$ は素数）上の多項式と思うこともできる。

2.2. 代入射.

A を可換環とし，B を A 代数とする。このとき，A 代数の準同型（可換環の準同型で構造射と可換なもの）

$$\varphi\colon A[x_1, x_2, \ldots, x_n] \longrightarrow B$$

を決めることは，各変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の行き先を決めることと同値である。

実際，上のような φ が決まれば，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の行き先は確かに決まっている。逆に，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ の行き先をそれぞれ任意に $a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$ とすると，任意の $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ に対して

$$\varphi(f) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

とすることで，写像 $\varphi\colon A[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to B$ が決まるが，これは変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を代入するという写像なので，明らかに環準同型であり，定数は定数に写されているので，A 代数の準同型である。

代入射

$a_1, a_2, \ldots, a_n \in B$ について

$$\varphi(f) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

で決まる A 代数射 $\varphi\colon A[x_1, x_2, \ldots, x_n] \to B$ を，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ に $a_1, a_2, \ldots, a_n$ を代入することで得られる A 代数射，あるいは簡単に**代入射**という。

上で述べたことは，すなわち「A 上の多項式環からの A 代数射は，すべて代入射である」ということ，すなわち

$$\boxed{\text{代}} \qquad \mathrm{Hom}_A(A[x_1, x_2, \ldots, x_n], B) \xrightarrow{\sim} B^n \qquad (\varphi \longmapsto (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_n)))$$

が全単射であるということである。このことを「おおらかに」言い換えれば

A 上の多項式環から B への A 代数射の全体は “B 上のアフィン空間” である

という感じのことになる。

2.3. 「方程式は環である・解とは準同型である」.

■ 方程式は環である． 体 K 上の有限個の多項式

$$(*)\qquad F_1(x_1,x_2,\dots,x_n),F_2(x_1,x_2,\dots,x_n),\dots,F_m(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

によって与えられる連立方程式

$$(**)\qquad \begin{cases} F_1(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\\ F_2(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\\ \qquad\cdots\\ F_m(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\end{cases}$$

を考えよう。この連立方程式を，K 代数の言葉に翻訳する。

[1] まず，K 上の多項式環 $K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ の中で，$(*)$ で生成されるイデアルを考える：

$$I=(F_1,F_2,\dots,F_m)\subset K[x_1,x_2,\dots,x_n]$$

I は

$$g_1F_1+g_2F_2+\cdots+g_mF_m\qquad (g_1,g_2,\dots,g_m\in K[x_1,x_2,\dots,x_n])$$

という形の要素全体の集合である。よって，連立方程式 $(**)$ は「I に属するすべての多項式 $=0$」ということ，すなわち

$$(\dagger)\qquad f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\quad \text{for any}\quad f\in I$$

と同値である。そこで「I に属する要素を形式的に $=0$ にする」という環（K 代数）

$$\boxed{\text{環}}\qquad K[x_1,x_2,\dots,x_n]/I$$

を考える。これが「連立方程式 $(**)$ の K 代数による表現」である。

■ 解とは準同型である B を任意の K 代数とするとき，§2.2 の $\boxed{\text{代}}$ という全単射

$$\boxed{\text{代}}\qquad \mathrm{Hom}_K(K[x_1,x_2,\dots,x_n],B)\xrightarrow{\sim}B^n\qquad (\varphi\longmapsto(\varphi(x_1),\varphi(x_2),\dots,\varphi(x_n)))$$

に注目しよう。$K[x_1,x_2,\dots,x_n]$ から B への（K 代数の）準同型 φ の中で，$K[x_1,x_2,\dots,x_n]/I$ を経由するもの，すなわち

$$\begin{tikzcd} K[x_1,x_2,\dots,x_n] \arrow[r, "\pi"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi"] & K[x_1,x_2,\dots,x_n]/I \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

（ただし，$\pi\colon K[x_1,x_2,\dots,x_n]\to K[x_1,x_2,\dots,x_n]/I$ は自然な全射準同型）となるもの全体は，$\mathrm{Hom}_K(K[x_1,x_2,\dots,x_n],B)$ の部分集合となるので，$\boxed{\text{代}}$ を通じて “アフィン空間” B^n の部分集合を定める。この部分集合 V を求めてみよう。

$\varphi\colon K[x_1,x_2,\dots,x_n]\to B$ が $(a_1,a_2,\dots,a_n)\in B^n$ に対応しているとする。つまり，

$$\varphi(x_i)=a_i\qquad (i=1,2,\dots,n)$$

あるいは（同じことだが）代入射

$$\varphi(f)=f(a_1,a_2,\dots,a_n)$$

とする。このとき，φ が $K[x_1,x_2,\dots,x_n]/I$ を経由するための必要十分条件は，任意の $f\in I$ について $\varphi(f)=0$ であること，すなわち，

$$\underline{(x_1,x_2,\dots,x_n)=(a_1,a_2,\dots,a_n)\text{ は }f(x_1,x_2,\dots,x_n)=0\text{ の解である}}$$

ということである。したがって，求める部分集合 $V \subset B^n$ は

$$(\ddagger)\quad \begin{aligned} V &= \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in B^n \mid \text{任意の } f \in I \text{ について } f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0\} \\ &= \text{連立方程式 } (**) \text{ の } B^n \text{ における解全体} \end{aligned}$$

ということになる。

命題

§2.2 の全単射 $\boxed{代}$ を通じて，

$$\mathrm{Hom}_K(K[x_1, x_2, \ldots, x_n]/I, B) \xrightarrow{\sim} V$$

ここで，$V \subset B^n$ は $(\ddagger)$ で定まる部分集合，すなわち連立方程式 $(**)$ の B^n における解空間である。

2.4. 体上の有限型代数.

定義（体上の有限型代数）

K を体とするとき,

$$K[x_1, x_2, \ldots, x_n]/I$$

（n は自然数，I は多項式環 $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ のイデアル）の形の K 代数に K 代数として同型な K 代数を，**体 K 上の有限型代数**という。

体上の有限型代数は，多くのよい環論的性質をもっている。

体上の有限型代数の基本的性質

K を体とし，A を K 上の有限型代数とする。

- 体上の有限型代数は Noether 環である（Hilbert の基底定理）。特に，そのイデアルはすべて有限生成である。
- 体上の有限型代数全体は有限型拡大で閉じている。すなわち，$A[y_1, y_2, \ldots, y_m]/J$ の形の K 代数は，また K 上の有限型代数である。
- Hilbert の零点定理が成り立つ（Jacobson 環である）。特に，任意の素イデアル $\mathfrak{p} \subseteq A$ について,

$$\mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}} \mathfrak{m}$$

すなわち，$\mathfrak{p}$ を含む極大イデアル全体の共通部分は $\mathfrak{p}$ に等しい。

- Noether 正規化定理が成り立つ。すなわち，単射な有限射

$$K[y_1, y_2, \ldots, y_d] \hookrightarrow A$$

が存在する。

特に，Noether 正規化から次のことが成り立つ。

命題

K 上有限型な体は，K の有限拡大である。

（証明）L を K 上有限型な体とする。Noether 正規化から $K[y_1, y_2, \ldots, y_d] \hookrightarrow L$ なる単射な有限射がある。L は体なので，これは $y_1, y_2, \ldots, y_d$ についての有理関数体 $K(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ を経由する。すなわち，$K(y_1, y_2, \ldots, y_d) \hookrightarrow L$である。しかし，$K[y_1, y_2, \ldots, y_d]$ は Noether 環で，L は $K[y_1, y_2, \ldots, y_d]$ 上の有限加群なので，その任意の部分加群は有限生成である。特に $K(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ は $K[y_1, y_2, \ldots, y_d]$ 上の有限生成加群ということなるが，$d > 0$ なら,（$y = y_1$ として）$y^{-1}, y^{-2}, y^{-3}, \ldots$ が含まれるので，これは有限生成にはなり得ない。よって，$d = 0$ である。すなわち，L は K 上の有限拡大である。 □

2.5. 体上のアフィン代数多様体. K を体とし，A を K 上の有限型代数とする。このとき，A に対応するアフィン代数的集合というものを定義したい。これは，発見的には「A という“方程式系”の“解”の集合」である。すなわち，それは，A から K の有限拡大 L への K 代数の準同型

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] & & L \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

のことである。ただし，$\varphi\colon A \to L$ と $\varphi'\colon A \to L'$ について，L と L' を両方含む K の有限拡大 L'' が存在して，

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, hook] & \\ A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & L'' \\ & L' \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

が可換なら（すなわち，L'' という大きな体まで上がれば“同じ解”になっているなら）“同じ”点（= 解）であるとみなすべきである。

このようなデータは，実は φ の核

$$\mathfrak{m} = \ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$$

を与えることと同じである。実際，上の φ と φ' について $\ker(\varphi) = \ker(\varphi')$ である。また，φ の像は L の中の K 部分代数だが，これは K 上有限な整域なので体である。よって，$\mathfrak{m}$ は A の極大イデアルである。逆に，A の極大イデアル $\mathfrak{m}$ が与えられたら，剰余体 $\kappa = A/\mathfrak{m}$ は K 上有限な体であり，標準的全射 $\pi\colon A \to \kappa$ がある。

以上より，A に対応するアフィン代数的集合とは，A の極大イデアルをその点とするべきであるとわかる。

アフィン代数的集合

K を体とし，A を K 上の有限型代数とする。A から決まる K 上のアフィン代数的集合とは

$$X_A = \{\mathfrak{m} \subset A \mid \mathfrak{m} \text{ は } A \text{ の極大イデアル}\}$$

のことである。

特に，$A = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ のとき，X_A を K 上の（n 次元）アフィン空間といい，

$$\mathbb{A}^n_K$$

で表す。

例

実数体 $\mathbb{R}$ 上の 1 次元アフィン空間（アフィン直線）を求めよう。$\mathbb{R}[x]$ は単項イデアル整域であり，その極大イデアルは既約多項式で生成される。代数学の基本定理（ガウス）によれば，$\mathbb{R}[x]$ の既約多項式とは（定数倍を除けば）

$$x - a \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{または} \quad x^2 + bx + c \quad (b, c \in \mathbb{R},\ b^2 - 4c < 0)$$

である。よって，$\mathbb{R}$ 上のアフィン直線の点は，複素数の共役類と 1 対 1 に対応している。

注意． 一般に，体 K 上の n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n_K$ は，集合としては $\overline{K}^n$ を $\overline{K}$ の K 上の自己同型全体（Galois 群）の作用で割ったものと同一視できる（ここで $\overline{K}$ は K の代数閉包である)。

例

代数閉体 K 上の 1 次元アフィン空間（アフィン直線）$\mathbb{A}^1_K$ を求めよう。$K[x]$ は単項イデアル整域であり，その極大イデアルは既約多項式で生成される。K が代数閉体なので，$K[x]$ の既約多項式とは（定数倍を除けば）

$$x - a \quad (a \in K)$$

である。よって，K 上のアフィン直線の点とは，K の点と 1 対 1 に対応している。

例

代数閉体 K 上の n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n_K$ も同様である。$K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の極大イデアルは

$$(x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n) \qquad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in K)$$

という形である（Hilbert の零点定理の特別な形)。よって，A^n_K も点は，K^n の点と 1 対 1 に対応している。

A が

$$A \cong K[x_1, x_2, \ldots, x_n]/I, \qquad I = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$$

の形のとき，準同型定理から，A の極大イデアルと，$K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の極大イデアルで I を含むものとが 1 対 1 に対応する。よって，X_A は K 上の n 次元アフィン空間の部分集合であり，

$$X_A = \{\mathfrak{m} \in \mathbb{A}^n_K \mid I \subset \mathfrak{m}\}$$

ということになる。これは，A が n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n_K$ の中で，連立方程式

$$(**) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

の “解空間” となっていることに対応している。

体上のアフィン代数多様体

K 上の有限型代数 A が整域であるとき，集合 X_A を K 上の**アフィン代数多様体**という。

■ アフィン代数多様体の L 有理点

K を体とし，A を K 上の有限型代数とする。L を K の拡大体とする。

L 有理点

A から決まる K 上のアフィン代数的集合 X_A の L **有理点**とは，K 代数の準同型

$$A \longrightarrow L$$

のことである。その全体を

$$X_A(L) = \mathrm{Hom}_K(A, L)$$

と書く。

X_A の L 有理点とは，感覚的には「"方程式 A" の座標が L に値をとる解全体の集合」である。前頁の状況に即して解釈すると，これは連立方程式

$$(**) \qquad \begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \qquad \cdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

の L^n における解全体のなす空間である。

例

実数体 $\mathbb{R}$ 上のアフィン直線 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ の $\mathbb{R}$ 有理点とは，

$$\mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}$$

なる $\mathbb{R}$ 代数のことであり，これは x の行き先で一意的に決まる。よって，$\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ である。同様に，$\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ もわかる。

例

$F = x^2 + y^2 - 1$ は $\mathbb{Q}$ 上の多項式なので，$A = \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ として，$\mathbb{Q}$ 上の代数多様体 $X_A(\overline{\mathbb{Q}})$ を定義する。ピタゴラス三つ組で知られた事実より，$X_A(\overline{\mathbb{Q}})$ は無限集合である。しかし，$A = \mathbb{Q}[x, y]/(x^2 + y^2 - 3)$ とすると，$X_A(\overline{\mathbb{Q}})$ は空集合であることが知られている。

注意． 最後の例で，$X_A(\overline{\mathbb{Q}})$ は空集合だが，X_A 自体は空集合ではないことに注意。

3. スキーム

3.1. アフィンスペクトラム. 2.5 節で，体 K 上の有限型代数 A から，X_A という空間が決まったのと同様なやり方を，完全に一般の環に拡張したい。

すなわち，一般の可換環 A に対して，そこから決まる X_A という集合（アフィンスペクトラムと呼ばれる）の点とは「A という “方程式系” の “解” の集合」である。すなわち，それは，A から体 L への環準同型

$$\varphi\colon A \longrightarrow L$$

のことである。ただし，$\varphi\colon A \to L$ と $\varphi'\colon A \to L'$ について，L と L' 両方の拡大体 L'' が存在して，

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dr, hook] & \\ A \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & & L'' \\ & L' \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

が可換なら（すなわち，L'' という大きな体まで上がれば “同じ解” になっているなら）“同じ” 点（= 解）であるとみなすべきである。

以前と同様に，このようなデータは φ の核

$$\mathfrak{p} = \ker(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$$

を与えることと同じである。実際，上の φ と φ' について $\ker(\varphi) = \ker(\varphi')$ である。

体上の有限型代数の場合（2.5 節）と異なる点は,（Noether 正規化定理にあたるものがないので）一般に φ の像は体にならないということである。しかし，体 L の部分環なので整域ではある。よって，$\mathfrak{p} = \ker(\varphi)$ は A の素イデアルである。

逆に，A の素イデアル $\mathfrak{p}$ が与えられると，剰余環 $A/\mathfrak{p}$ は整域であり，その商体 κ をとれば，体への環準同型

$$A \xrightarrow{\pi} A/\mathfrak{p} \hookrightarrow \kappa$$

が得られる。

以上より，A に対応する “アフィン代数的集合の類似物” として考えるべき空間は，A の素イデアルをその点とするべきであるとわかる。

アフィンスペクトラム

A を可換環とする A から決まる <u>アフィンスペクトラム</u> とは

$$\mathrm{Spec}\,A = \{\mathfrak{p} \subset A \mid \mathfrak{p} \text{ は } A \text{ の素イデアル}\}$$

のことである。

例

複素数体 C 上のアフィン直線 $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ は，スキームとしては

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x]$$

のことである。$\mathbb{C}[x]$ の素イデアルは（$\mathbb{C}[x]$ は単項イデアル整域なので），(0) と極大イデアルである。よって，代数多様体としてのアフィン直線に (0) という点（生成点）が付いた形である。

例

体 K 上の n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n_K$ は，スキームとしては
$$\mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spec} K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$$
のことである。これは極大イデアル（K 上の代数多様体としての点）の他に，既約な閉部分多様体の生成点がすべて付け加えられたものである。

例

$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ は（$\mathbb{Z}$ が単項イデアル整域なので），(0) と極大イデアル（= 各素数）からなる。

3.2. 作用素スペクトラムとしての解釈. 古典的な体上の代数幾何学において，X_A の A（K 上の有限型代数）は座標環と呼ばれ，その要素は関数としての役割を果たしている。実際，K が代数閉体なら，X_A の任意の要素（A の極大イデアル $\mathfrak{m}_x$）について，剰余体 $A/\mathfrak{m}_x = K$ であるので，任意の $f \in A$ は
$$f\colon X_A \longrightarrow K \qquad \mathfrak{m}_x \longmapsto f(x) = (f \bmod \mathfrak{m}_x)$$
という「関数」と思うことができる。

例

代数閉体 K 上の n 次元アフィン空間 $\mathbb{A}^n_K$ の点（$K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ の極大イデアル）は $\mathfrak{m} = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_n - a_n)$ という形をしているのであった。これは代入写像
$$K[x_1, x_2, \ldots, x_n] \longrightarrow K \qquad (f \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_n))$$
の核であるから，各 $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A = K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ について，f の $A/\mathfrak{m} = K$ における像は $f \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ に等しい。

しかし，一般の環 A については，その任意の $\mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec} A$ における剰余体 $\kappa(x)$（整域 $A/\mathfrak{p}_x$ の商体）は各点によってバラバラで一定しない。よって，$f \in A$ を $\operatorname{Spec} A$ の各点 $\mathfrak{p}_x$ に対して $\kappa(x)$ における f の像を対応させても，安直に関数と思うことはできない。

関数として安直に解釈はできないが，もっと大まかに作用素として解釈することができる。
$$f(x)$$
とは，点 x に作用素 f が作用したものという形をしている。例えば，量子力学ではヒルベルト空間（状態の空間）上のエルミート作用素（観測量）が扱われ，作用素は各スペクトル（固有値）上の分布として捉えることができる。この考え方の類似を追いかければ，各 f は作用素であり（すなわち，A は作用素環であり），各素イデアルはその固有値であり，各素点における剰余体の値が f の分布を決めていると解釈することができる。

3.3. 関手としてのスキーム. 体 K 上の有限型代数 A から決まるアフィン代数多様体 X_A においては，K の任意の拡大体 L に対して，その L 有理点全体が
$$X_A(L) = \operatorname{Hom}_K(A, L)$$
で決まった。

一般の環 A から決まるアフィンスキーム $X = \operatorname{Spec} A$ と，任意の可換環 B に対して

$$X(B) = \operatorname{Hom}(A, B)$$

として，その各要素を $X = \operatorname{Spec} A$ の B 有理点と呼ぶ。これは可換環の圏から集合の圏への関手

$$X\colon \boldsymbol{CRing} \longrightarrow \boldsymbol{Sets}$$

を定義している。

$X = \operatorname{Spec} A$ の B 有理点とは，以前の考え方に従えば

「“方程式”A の B における “解”」

と解釈できる。すなわち，

関手としてのスキーム

アフィンスキーム $X = \operatorname{Spec} A$ はデータとしては「方程式」そのものであり，様々な環 B に対して，B おける「解」集合を与える関手と見做すことができる。

代数幾何学とは「方程式系の解空間となる図形」を対象とする学問であるが，スキーム論的な見地では,「方程式 = 環そのもの」を,「解」を与えるという関手として捉えることによって，より精密な構造を捉えようとする学問なのだということができる。

3.4. 整数論とスキーム理論. スキーム理論と体上の代数幾何学の根本的に違うところは，後者が「体上有限型な代数」（およびその局所化）しか基本的には扱えないのに対して，スキーム論ではすべての環を相手にすることができる。すなわち，すべての環を “方程式” だと思って，その解を考えることができることである。

例えば，$\mathbb{Z}$ 上の有限型スキームの例として，

$$A = \mathbb{Z}[x, y]/(y^2 - f(x)), \quad f(x) = x^3 - x$$

から決まるアフィンスキーム E を考えよう。

- E の $\mathbb{C}$ 値点 $E(\mathbb{C})$（$y^2 = f(x)$ の複素数による解 (x, y) 全体）はトーラス（から一点引き）になる。

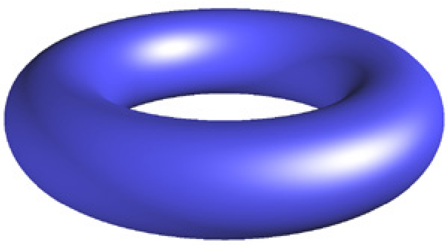

Figure 1. トーラス

- $E(\mathbb{R})$（$y^2 = f(x)$ の実数による解 (x, y) 全体）は図 2 のような図形になる。

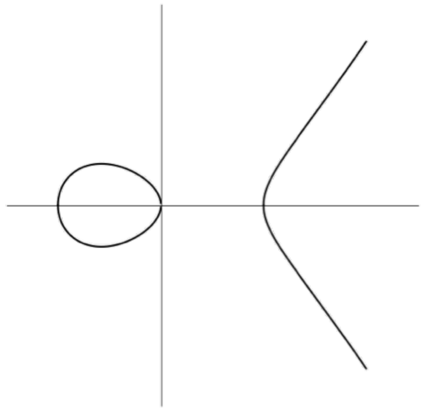

FIGURE 2. $y^2 = x^3 - x$ の $\mathbb{R}$ 値点

- $E(\mathbb{Q})$（$y^2 = f(x)$ の有理数による解 (x, y) 全体）つまり有理点全体がどうなっているかは，非常に難しい整数論の問題である。この場合は
$$(x, y) = (0, 0), (\pm 1, 0)$$
しかない。
- $E(\mathbb{F}_p)$（$y^2 - f(x) \equiv 0 \pmod p$ の解 (x, y) 全体）

このように，様々な体や環における “解” の概念を定式化することができて，しかもその間の関係性を調べることができることがスキームの強みである。これによって，$\mathbb{Z}$ は $\mathbb{F}_p$ 上の数論的問題が，代数幾何の問題と関係することができる。その際たる例が「ヴェイユ予想」である。

■ ヴェイユ予想

ヴェイユ予想とは，有限体 $\mathbb{F}_{q^n}$ 上のスキーム（≒ 方程式）の有理点（≒ 解）の個数が作る n に関する数列が，実は幾何的な法則性に従っているということを予想したものである。もう少し具体的には，この数列 N_n によって構成されるある種の母関数（合同ゼータ関数）が有理関数であり，その分子分母に現れる多項式の構造が幾何的な条件によって統制されているということ。

東京工業大学 理学院 数学系 〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1
E-mail address: bungen@math.titech.ac.jp