望月新一さんの数学

玉川安騎男（京大数理研）

京都大学数理解析研究所教授の望月新一会員が, 第１回日本学術振興会賞ならびに第１回日本学士院学術奨励賞を受賞されました. 日本学術振興会賞は, 人文・社会・自然科学の全分野における４５歳未満の研究者が授賞対象で, 第１回の今回は, ２５名の受賞者が選ばれました. 日本学士院学術奨励賞は, 日本学術振興会賞受賞者の中から毎年５名以内に授与されるもので, 第１回の今回は, ５名の受賞者が選ばれました. どちらの賞も, 今回数学での受賞者は望月さん１名です. 特に, 日本学士院学術奨励賞は, 受賞者が５名ということで, 受賞者のいない分野も多いわけですから, その意味でも, 望月さんの受賞は, 日本数学会にとって喜ばしいことと言えると思います.

望月さんは, １９６９年3月２９日東京都に生まれ, ５歳の時にお父様のお仕事の関係で渡米されて以来, （中学生の頃に１年間日本に戻られた以外は）学生時代を主に米国で過ごされました. １９８８年（１９歳で！）プリンストン大学数学科を卒業, １９９２年（２３歳で！）同大学大学院数学科博士課程を修了して Ph.D を取得されました.（プリンストン大学における指導教員は, あの G. Faltings 氏です.）同時に日本に戻られて京都大学数理解析研究所助手に就任され, その後, １９９６年（２７歳で！）助教授に, ２００２年（３２歳で！）教授に昇任されて現在に至っています.

望月さんの専門は数論幾何です. 今回の受賞題目は「p 進的な手法によるグロタンディークの遠アーベル幾何予想の解決など双曲的代数曲線の数論幾何に関する研究」ということで, p 進タイヒミュラー理論, 遠アーベル幾何, ホッジ・アラケロフ理論など, 双曲的代数曲線の数論幾何に関する多岐にわたる卓越した研究業績を挙げてこられたことが, 受賞の対象となりました. 以下では, 望月さんのこれらの研究業績について, ごく簡単にご説明させていただきたいと思います.

[p 進タイヒミュラー理論]

複素数体上の双曲的代数曲線とそのモジュライ空間の一意化理論としては, （ケーベの一意化定理, ベアス理論などを含む）タイヒミュラー理論が古典的に確立されています. 一方, p 進体上の（偏極）アーベル多様体とそのモジュライ空間の一意化理論としては, セール・テイト理論が１９６０年代に確立されています. しかしながら, p 進体上の双曲的代数曲線とそのモジュライ空間の一意化理論は, 望月さんの研究以前には満足のいくものがほとんどありませんでした. （マンフォード一意化理論はありましたが, これは, タイヒミュラー理論ではなくショットキー一意化理論の類似です.）

タイヒミュラー理論は, 通常の定式化では純に複素解析的なものであり, p 進的類似を求めることは不可能に思われます. そこで, 望月さんは, タイヒミュラー理論の固有束による定式化に着目し, これを足がかりにして p 進タイヒミュラー理論を構築していきました. その際, 技術的な核となったのは, 正標数代数多様体の上のクリスタルの理論や p 進代数多様体の p 進ホッジ理論などです. その結果, 代数曲線とそのモジュライ空間の望ましい p 進一意化理論が完成し, 曲線のモジュライ空間上の標準フロベニウス持ち上げと標準座標, 曲線の標準持ち上げ, 曲線の数論的基本群の PGL_2 への標準表現, など斬新かつ基本的な対象たちが続続と発見されました. これらの結果は, 約２００ページの大論文 [1] と５００ページ超の大著 [2] にまとめられました.

p 進タイヒミュラー理論の応用としては, 望月さん自身によって, 曲線のモジュライ空間の既約性の別証明や, 遠アーベル幾何（絶対 p 進グロタンディーク予想）への応用などが得られています. また, 望月さんのこの斬新な理論は, F. Oort, B. Moonen ら曲線・アーベル多様体のモジュライの数論幾何の研究者, A. Ogus, B. Osserman ら正標数代数幾何の研究者, F. Voloch ら代数幾何的符号理論の研究者など, さまざまな分野の研究者の注目を集めています.

上記の著書の題名が物語るように, 望月さんの手によって p 進タイヒミュラー理論の基礎は確立されましたが, 新しく現れた上記の基本的な数学的対象たちは, 理論的にも応用的にも豊富な研究の余地を残しています. 特に, 古典的なタイヒミュラー理論とその応用の一つ一つについて, その p 進的類似が何であるかを考えることは, 数論幾何の重要な問題であると言えると思います.

[遠アーベル幾何]

遠アーベル幾何（anabelian geometry）とは, １９８０年代初頭に A. Grothendieck が提唱した数論幾何の新しい方向で, 狭義には, 有理数体上有限生成な体上の「遠アーベル」な多様体の幾何がその基本群の上の（外）ガロア表現によって完全に復元されるという, いわゆるグロタンディーク予想を意味します. 双曲的代数曲線に対するグロタンディーク予想は, 中村博昭さん（現岡山大）と筆者によって部分的に解決されていましたが, 望月さんはこれを完全に解決し, 更に, p 進体上でも同様の結果が成り立つことを示しました. この際, p 進体上の代数多様体に対する p 進ホッジ理論が中心的な役割を果たしました. 望月さんのこの結果は, 現在に至るまで遠アーベル幾何の最高峰をなし, 広く数論幾何学者全体に影響を与えていると思います. 特に, Grothendieck 自身が, 遠アーベル幾何は素体上有限生成な体に固有なものと考えていこともあり, また, アーベル多様体のテイト予想の類似からも, p 進体上でグロタンディーク予想が成立することは意外であり, 望月さんの結果のインパクトは大きかったと思います.

望月さんの遠アーベル幾何における成果は, Inventiones mathematicae 掲載の１００

ページ超の大論文 [3] などにまとめられました．なお, 望月さんは, 「代数曲線の基本群に関するグロタンディーク予想の解決」の題目で，１９９７年度日本数学会賞秋季賞を（中村氏, 筆者と共同で）受賞しています．また, 望月さんは, p 進タイヒミュラー理論と遠アーベル幾何に対し, 内在的ホッジ理論の枠組みで統一的な視点を与え, これについての総合的な報告を, １９９８年（２９歳で！）国際数学者会議の招待講演にて行いました.

[ホッジ・アラケロフ理論]

エフェクティブモーデル予想, abc 予想などのディオファントス幾何の重要未解決問題は, スピロ予想を通じて, 楕円曲線のモジュライ空間の代数体の整数環上のセクションの研究と解釈でき, すなわち, 代数体の整数環上の（一般化された）楕円曲線の研究と解釈できます．この解釈により, このような大域的対象に対する望ましいホッジ理論があれば, ディオファントス幾何へのアプローチができることが期待できるため, 望月さんは, そのような理論の構築を目指し, 代数体上の楕円曲線の内在的ホッジ理論である, ホッジ・アラケロフ理論を完成させました．より具体的に言うと, 楕円曲線の p 進ホッジ理論では, 楕円曲線の p 進テイト加群が中心的対象でしたが, これを有限個の等分点だけ考えることにより離散化し, 等分点集合（位相幾何的ないしエタール的な対象）に, 楕円曲線の普遍拡大上の関数（ドラーム的な対象）を制限することにより, ある種の大域的な比較同型をダイナミックに構成・証明しました．また, これに伴い, 数論的小平・スペンサー写像という斬新な対象も発見されました．ディオファントス幾何への応用を見据えた望月さんのこの大理論の完成は, 内外にインパクトを与え, また, 純粋に楕円曲線のホッジ・アラケロフ理論自体も, G. Kings ら岩澤理論の研究者などから注目されています.

これらの結果に関する膨大な（複数の）論文は, RIMS プレプリントより入手可能であり, また, 望月さん本人によるコンパクトな概説 [4] も出版されています.

[その他]

望月さんは, その他, フルヴィッツスキームのコンパクト化の幾何（学位論文）, ベクトル束の半正値性とクリスタル, 双曲的曲線の代数的対応, ログ正則スキーム上の曲線の族の延長などに関して, 純代数幾何学的に重要な結果もこれまでに多数得ています.

最近の望月さんは, 自身のホッジ・アラケロフ理論の研究を大きく展開（転回？）させて, 圏論を基礎とする全く新しい幾何学の壮大な理論の構築とその数論的応用を精力的に研究されています．望月さんのこれまでの研究も, ディオファントス幾何への応用を強く意識しながら大理論を構築する, というスタイルが特徴的でしたが, 現在の研究

は, ディオファントス幾何をより直接的な研究対象としており, abc 予想などの重要未解決問題の解決が近いことを, 望月さん本人も確信しておられるようです. そのため, 望月さんの現在の研究は, 内外の研究者から熱い注目を集めており, 筆者も, 松本眞さん（広島大）, 藤原一宏さん（名大）らとともに, 望月さん自身を講師として不定期に勉強会を開いています.

また, 望月さんのこのようなディオファントス幾何への新しいアプローチから, p 進体上の遠アーベル幾何の絶対版（基礎体のガロア群も固定しないで考えたもの）が数論的に重要であることが示唆されています. この方向では, 望月さんは, 例えば, p 進タイヒミュラー理論における標準曲線においてこの絶対 p 進グロタンディーク予想が成立することを証明しました. より一般の双曲的曲線については, 望月さんと筆者の間で議論が現在進行中です.

望月さんが（筆者の２か月後に）数理解析研究所助手として就任されて以来, 遠アーベル幾何を中心にして, 二人でたくさんの議論をしてきました. （というと聞こえがいいですが, 主に望月さんのアイディアを聞かせていただいてきたという感があります.）望月さんの数学は常に斬新で刺激的で, 筆者のこれまでの研究も, そこから大きな影響を受けています. 現在も, 望月さんから「ちょっとした観察があるので聞いてほしいのですが」というような控えめなメールをもらうことがよくあり, しばしばその観察はちょっとしたものではなく, 大きなブレークスルーとなりうるようなものなので, いつもわくわく（少しドキドキ）させてもらっています.

普通の研究者（例えば私）であれば, ディオファントス幾何に関する結果をなるべく早く形にして２００６年のフィールズ賞に間に合うようにと考えるでしょうが, 望月さんは, 賞に対しては全く無欲（というか, むしろやや否定的）で, 十分時間をかけて基礎理論を満足のいくような形で完成させることに力を注いでいます. また, （A. Wiles がフェルマ予想に挑んでいた時などと違い）大予想の証明に向かう途中の理論についても, 全てプレプリントなどで公開しています. それを見て誰かが先に証明してしまうのではないかという周囲の心配もどこ吹く風, 「自分の理論を理解して先に証明してくれるのであればむしろありがたい」とおっしゃっています.

現在３６歳の望月さんが, これからどれだけの研究成果を人類に遺してくれるのか, 非常に楽しみにしています. （同時に, これからどれだけこのような文章を書かせていただくことになるのか, 少し不安に感じています....）

参考文献

[1] Shinichi Mochizuki, *A theory of ordinary p-adic curves*, Publications of RIMS **32** (1996), 957–1152.

[2] ———, *Foundations of p-adic Teichmüller theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 11, Amer. Math. Soc.; International Press, 1999.

[3] ———, *The local pro-p anabelian geometry of curves*, Invent. Math. **138** (1999), 319–423.
[4] ———, *A survey of the Hodge-Arakelov theory of elliptic curves*, I, in Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., 70, Amer. Math. Soc., 2002, pp. 533–569; II, in Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka), Adv. Stud. Pure Math., 36, Math. Soc. Japan, 2002, pp. 81–114.